BOUSSINESQ, J.

Cours d'analyse infinitésimale

Tome 1 fasc. 1

Gauthier-Villars

Paris **1887**

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PARTIE ÉLÉMENTAIRE.





COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE,

A L'USAGE DES PERSONNES QUI ÉTUDIENT CETTE SCIENCE

EN VUE

DE SES APPLICATIONS MÉCANIQUES ET PHYSIQUES;

PAR J. BOUSSINESQ,
Membre de l'Institut,
Professeur de Mécanique physique à la Faculté des Sciences de Paris,
Ancien Professeur de Calcul différentiel et intégral
à la Faculté des Sciences de Lille et à l'Institut industriel du Nord.

TOME I.
CALCUL DIFFÉRENTIEL.

FASCICULE I.
PARTIE ÉLÉMENTAIRE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

1887

AVANT-PROPOS.

Ce *Cours d'Analyse infinitésimale,* sous sa première forme (en un Volume autographié de XXVIII-554 pages), contenait l'exposé de Leçons que j'ai faites, à Lille, de 1873 à 1886, aux élèves du Génie civil de l'Institut industriel établi dans cette ville. Le but en étant essentiellement pratique, c'est-à-dire relatif aux objets et aux phénomènes de l'ordre réel qu'il s'agissait seulement d'apprendre à se représenter d'une manière géométrique précise, j'y avais réduit la part des formules abstraites à ce qui était nécessaire pour comprendre et appliquer les méthodes générales, bien que j'y eusse abordé toutes les parties usuelles des Calculs différentiel et intégral. Mais j'avais, par contre, fait la plus grande place aux démonstrations intuitives, où l'esprit, tout en se portant sur le détail qu'il doit fixer à chaque instant dans sa marche, conserve une certaine vue de l'ensemble du sujet étudié et de ses multiples rapports : ce qui le préserve des fausses abstractions, des hypothèses trop étroites, et assure à ses facultés un développement harmonique dans lequel la culture mathématique progresse sans porter atteinte au sentiment de la réalité.

En devenant l'Ouvrage actuel, mes Leçons de l'Institut industriel du Nord se sont grandement complétées, sans changer de caractère ni presque de cadre. J'ai pensé qu'un Cours plus étendu, quoique aussi élémentaire, où seraient exposées dans le même esprit concret toutes les théories générales de l'Analyse qui se sont montrées jusqu'ici effectivement utiles aux physiciens et aux ingénieurs, répondrait à un vrai besoin : car, s'il a paru plus ou moins récemment parmi nous de savants et beaux Traités de Calcul différentiel et intégral, aucun de leurs éminents auteurs ne s'est proposé de mettre cette science, ou plutôt la partie de cette science qui a reçu et reçoit tous les jours de



applications physiques et industrielles, à la portée d'un grand nombre de praticiens ou d'expérimentateurs, n'ayant qu'une légère teinture des Mathématiques spéciales et encore peu d'habitude du calcul algébrique, auxquels elle rendrait les plus grands services dans leurs études propres.

On sait, en effet, par l'exemple de l'Astronomie et de toutes les branches un peu avancées de la Mécanique et de la Physique, que, si l'observation ou même l'expérimentation des phénomènes doit être à la base de ces études et contrôler leurs résultats, l'Analyse infinitésimale devient leur grand moyen de progrès, dès qu'elle y a eu prise par la découverte de quelque loi fondamentale simple, fût-elle seulement approchée, mais susceptible d'une expression algébrique ou géométrique. Et c'est justement l'unanime conviction de cette nécessité d'adjoindre le haut calcul à l'expérience, pour faire sortir de leur empirisme primitif les Sciences de la nature et leur imprimer une forme précise, seule satisfaisante, qui a assuré aux Mathématiques leur grande place dans les Écoles techniques, dans les Facultés des Sciences et même dans la société. Or, contrairement à une opinion fort répandue, les parties de l'Analyse fécondes en applications sont de beaucoup les plus faciles, comme m'autorise à l'affirmer une expérience personnelle et, j'ose dire, très variée, d'un quart de siècle : elles n'exigent ni une puissance d'abstraction comparable à celle que demandent d'autres branches, jusqu'ici purement curieuses, de la même science, ni surtout l'acquisition préalable de grandes connaissances en Mathématiques spéciales. Quelques mois de travail, au plus, suffiraient à tout bachelier ès sciences, pour se faire, des équations algébriques et de l'évaluation approchée de leurs racines réelles, des lignes et des surfaces des deux premiers degrés, l'idée juste, mais sommaire, qui lui permettrait d'aborder avec fruit le Calcul différentiel et intégral, et d'utiliser ainsi, dans ses études ultérieures comme ingénieur, physicien, naturaliste, philosophe, etc., cet instrument de recherches et de mesure, d'une merveilleuse puissance, que nous devons à nos ancêtres scientifiques du XVIIe siècle.

J'ai fait le possible pour que mes lecteurs les plus novices, munis seulement des quelques connaissances dont je viens de parler, puissent

me suivre couramment sans le secours d'un maître; et, à cet effet, je suis entré dans tous les détails d'explication que comporte un Cours oral. L'étendue, qu'on trouvera peut-être excessive, des deux Volumes de cet Ouvrage, consacrés, l'un, au Calcul différentiel, l'autre, au Calcul intégral, ne doit donc pas effrayer, si, comme je l'espère, la lecture en est rendue plus facile, et l'on n'arrivera pas moins vite au but.

Toutefois, comme il est, dans l'Analyse, des parties d'un caractère particulièrement élémentaire et d'une utilité plus générale, dont pourront se contenter les élèves des écoles industrielles et les personnes qui n'ont pas l'intention d'aller jusqu'aux grands problèmes de la Physique mathématique, j'ai réuni ces Parties, que l'on aura ainsi à part et sous une forme plus maniable, dans deux Fascicules spéciaux, un pour le Calcul différentiel, l'autre pour le Calcul intégral. Chacun de ces deux Fascicules, intitulé *Partie élémentaire,* constitue environ la première moitié du Tome correspondant : il peut être étudié indépendamment de l'autre Partie, ou Fascicule II, qui a pour titre *Compléments* et une pagination distincte marquée d'astérisques. Mais, comme cependant l'œuvre entière a son unité, elle ne comprend qu'une seule série de Leçons, et même de numéros ou articles, affectés d'astérisques quand ils se rapportent aux *Compléments,* et ayant, même alors, leurs titres reproduits dans la *Partie élémentaire,* à la place qui leur convient; de sorte que les Fascicules premiers, aux endroits où l'ordre logique y amène les questions traitées dans les *Compléments,* portent l'indication de ces questions, avec renvoi aux pages des seconds Fascicules où elles se trouvent développées. La réunion, en un seul Volume, des deux Fascicules de chaque Tome, suffira donc pour rendre l'étude intégrale du Cours presque aussi aisée que sans cette division en *Partie élémentaire* et *Compléments.*

Un Ouvrage de cette nature, où se trouvent condensés les résultats légués par un passé déjà ancien comprenant les noms les plus glorieux de la Science, ne laisse que peu de place aux recherches personnelles de l'auteur. Cependant, si les géomètres veulent bien se donner la peine de parcourir celui-ci, ils y verront quelques parties originales, que j'ai cru pouvoir, quand elles entraient bien dans le sujet des Leçons, extraire de Mémoires publiés par moi à diverses

dates et dans différents Recueils (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences; Mémoires de la Société des Sciences de Lille; Journal de Mathématiques pures et appliquées*, etc.). Je me contenterai de citer: dans le Tome I, la définition naturelle des paramètres différentiels des fonctions de point, l'étude de l'isotropie des corps par des rotations infiniment petites d'axes coordonnés, la théorie des lignes d'infini rapprochement relatif entre courbes successives d'une même famille, avec celle des courbes asymptotes et des enveloppes asymptotes d'une telle famille, la formule des variations de la pente d'une surface le long d'une ligne de niveau et la propriété qui en résulte pour les lignes que j'ai appelées des *déclivités maxima* ou *minima* de la surface, l'expression élémentaire des dilatations éprouvées par une petite partie d'une surface courbe extensible que l'on déforme; dans le Tome II, l'éclaircissement des notions d'aire plane et de volume, les potentiels tant logarithmiques que sphériques, à trois ou à quatre variables, et une certaine classe d'intégrales définies où figure sous le signe $\int$ le produit de deux fonctions arbitraires, avec la manière d'arriver simplement, par l'emploi de ces diverses sortes d'expressions, aux intégrales naturelles des équations d'importants problèmes de la Physique mathématique, enfin les propriétés de minimum dont jouit la courbe plane représentant le profil d'une onde liquide importante, dite *onde solitaire*.

En terminant, je tiens à remercier M. Gauthier-Villars des soins qu'il a apportés à la perfection typographique de l'Ouvrage; elle est, pour tout dire en un mot, digne de la réputation de l'éminent éditeur. Que M. l'ingénieur en chef Flamant, professeur de Mécanique à l'École des Ponts et Chaussées et à l'École centrale des Arts et Manufactures, me permette aussi de le remercier de la peine qu'il a prise de m'y signaler, sur les épreuves qu'il a bien voulu parcourir, d'utiles changements dans la rédaction.

TABLE DES MATIÈRES

DU PREMIER VOLUME,

CONSACRÉ AU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

(Les indications de pages et de numéros ou articles, *suivies d'astérisques*, renvoient au *Fascicule II*, les autres, au Fascicule I).

TROISIÈME LEÇON.

SUITE : ÉTUDE DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES.

QUATRIÈME LEÇON.

OBJET ET MÉTHODE DE L'ANALYSE INFINITÉSIMALE ; SA DIVISION EN CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL. — CALCUL DIFFÉRENTIEL : NOTION DE DIFFÉRENTIELLE; DIFFÉRENTIATION D'UNE FONCTION ET D'UNE FONCTION DE FONCTION.

CINQUIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS COMPOSÉES ET DES FONCTIONS IMPLICITES. * SUPÉRIORITÉ DE CERTAINES ÉQUATIONS IMPLICITES SUR LES ÉQUATIONS EXPLICITES POUR EXPRIMER LES COURBES ET LES SURFACES. PLANS TANGENTS. * PARAMÈTRE DIFFÉRENTIEL DU PREMIER ORDRE DES FONCTIONS DE POINT.

SIXIÈME LEÇON.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR DES FONCTIONS SIMPLES OU COMPOSÉES; * COURBURE DES COURBES PLANES, ET * PARAMÈTRE DIFFÉRENTIEL DU SECOND ORDRE DES FONCTIONS DE POINT; * CHANGEMENTS DE VARIABLES.

Pages

SEPTIÈME LEÇON.

DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES ET * DES CHANGEMENTS DE CES VARIABLES. * APPLICATIONS AUX FONCTIONS DE POINT ET A L'ISOTROPIE DES CORPS.

HUITIÈME LEÇON.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL : ÉLIMINATION DES CONSTANTES ET * DES FONCTIONS ARBITRAIRES PAR LA DIFFÉRENTIATION, D'OU SE DÉDUISENT CERTAINES PROPRIÉTÉS POUR LES FAMILLES DE FONCTIONS; * ÉTUDE DES FONCTIONS HOMOGÈNES; THÉORÈME DE CAUCHY SUR LE RAPPORT DES ACCROISSEMENTS SIMULTANÉS DE DEUX FONCTIONS, ET SON EMPLOI, PRINCIPALEMENT DANS LE CALCUL DES EXPRESSIONS DE FORME INDÉTERMINÉE.

NEUVIÈME LEÇON.

SUITE DES APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL : DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES ENTIÈRES; FORMULES DE TAYLOR ET DE MAC LAURIN; DÉVELOPPEMENT DE $(a+b)^m$, ETC.

Pages

DIXIÈME LEÇON.

SUITE DES APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL : THÉORIE GÉNÉRALE DES VALEURS MAXIMA OU MINIMA DES FONCTIONS; PROBLÈME DE FERMAT, ETC.

ONZIÈME LEÇON.

SUITE DE LA THÉORIE DES MAXIMA ET DES MINIMA : * MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS; * THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE; MAXIMA ET MINIMA RELATIFS, ETC.

DOUZIÈME LEÇON.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL : THÉORIE DU CONTACT DES COURBES PLANES; ÉTUDE DE LEURS DROITES OSCULATRICES, DE LEUR CONCAVITÉ OU CONVEXITÉ ET * DE LEURS POINTS SINGULIERS.

TREIZIÈME LEÇON.

DU CERCLE OSCULATEUR, DE LA COURBURE ET DE LA DÉVELOPPÉE DES COURBES PLANES.

QUATORZIÈME LEÇON.

SUITE : COURBURE ET DÉVELOPPÉE DES SECTIONS CONIQUES. * THÉORIE DES COURBES ENVELOPPES.

Pages

QUINZIÈME LEÇON.

DES ROULETTES ET DE LA CYCLOÏDE; * COURBES PLANES EN COORDONNÉES POLAIRES; * DE LA SPIRALE LOGARITHMIQUE.

SEIZIÈME LEÇON.

DES COURBES GAUCHES : TANGENTE ET * POINTS SINGULIERS, ARC, PLAN NORMAL, PLAN OSCULATEUR, NORMALE PRINCIPALE ET BINORMALE.

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

SUITE DE L'ÉTUDE DES COURBES GAUCHES : CERCLE OSCULATEUR, COURBURE ET * CAMBRURE.

DIX-HUITIÈME LEÇON.

DES SURFACES COURBES : PLAN TANGENT ET * POINTS SINGULIERS ; NORMALE ; * LIGNES DE PENTE.

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

* COURBURE DES SURFACES.

VINGTIÈME LEÇON.

* LIGNES DE COURBURE ET LIGNES ASYMPTOTIQUES. SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX DE SURFACES ET TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES. * NOTIONS SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES ET SUR LES SURFACES APPLICABLES. * LIGNES GÉODÉSIQUES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

ERRATA.

Page 6, ligne 6, *supprimer le mot :* seules.

Page 143, ligne 12 en remontant, *au lieu de :* n, *lire :* h.

Page 166. Le numéro de la figure doit être 18 et non 5.

Page 171, ligne 3, après L, *intercaler ce membre de phrase :*
« et si, d'ailleurs, l'étendue dans laquelle la fonction croît de part et d'autre du minimum, ou décroît de part et d'autre du maximum, ne se réduit, en aucun de ces cas, à un simple point, ou même n'approche pas indéfiniment de zéro ».

Page 232, dernière ligne, *au lieu de :* issue de m, *lire :* issue de M.

Page 2*, fin de la ligne 22, *ajouter, en note au bas de la page :*

« Il va sans dire, d'après le raisonnement fait sur R'_n au haut de cette page, que la série $u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots$ est supposée présenter un *certain* degré de convergence, aussi petit que l'on voudra, mais ne tendant vers zéro *à l'approche* d'aucune valeur considérée de x. Nous excluons donc le cas singulier d'une lenteur de convergence qui, en certains des endroits dont il s'agit (fussent-ils infiniment restreints), dépasserait toute limite et ne permettrait pas de s'en tenir à un nombre *assignable* de termes dans l'évaluation approximative de la série. »

Page 46*. Le numéro de la figure doit être 10 et non 4.

Page 184*. Le numéro de la figure doit être 25 et non 29.

Page 213*, à la fin du n° 168*, *ajouter en note au bas de la page :*

« Il est bon de remarquer une simplification qui se produit quand on choisit la tangente MT pour axe des x. Alors, le cosinus x' atteignant en M son maximum 1, le principe de Fermat y donne $x'' = 0$, et les deux autres cosinus y', z', nuls pour le point M, sont, pour le point M', ceux d'angles presque droits $t'Oy$, $t'Oz$ qui ont leurs plans respectifs à peine différents de ceux des xy et des xz, sur lesquels, par suite, ces angles se projettent sensiblement en vraie grandeur (p. 108*). C'est évidemment dire que dy' ou $y''ds$ et dz' ou $z''ds$ représentent les deux angles respectifs de contingence des projections de l'arc MM' ou ds sur les plans des xy et des xz; et, vu que chacune des mêmes projections de ds peut, sauf erreurs négligeables, être prise égale à $dx = x'ds$ ou, par suite, à ds, les deux dérivées y'', z'' sont, en résumé, les courbures de ces deux projections. Donc la formule (30) [p. 249], réduite à $d\theta = \sqrt{y''^2 + z''^2}\,ds$, exprime alors que, *si l'on projette un élément d'arc ds sur deux plans rectangulaires se croisant suivant sa tangente, les angles de contingence et les courbures de ses deux projections auront pour sommes respectives de leurs carrés les carrés mêmes de son angle de contingence et de sa propre courbure.* De plus, d'après les formules (25) [p. 210*], *le rayon* R *de courbure fera, avec les plans des deux projections, des angles ayant leurs cosinus* Ry'' *et* Rz'' *respectivement proportionnels aux courbures* y'' *et* z'' *de celles-ci.* »

Page 217*. Accentuer, sur la figure, le second T, en remontant.

Page 277*, ligne 9, à la fin, rétablir la lettre δ, ou lire $\frac{r'\iota'}{r\iota}\,\delta z$.

Page 284*, ligne 15 en remontant, *après* Ch. Dupin, *ajouter, en note au bas de la page :*

« Le géomètre français Binet, de son côté, a, vers la même époque que Ch. Dupin sinon un peu avant, découvert ce système triple orthogonal constitué par les surfaces homofocales du second degré, et reconnu aussi que ces surfaces s'intersectent mutuellement suivant leurs lignes de courbure (*Journal de l'École Polytechnique*, t. IX, mai 1813, p. 59 : *voir* aussi, dans les *Développements de Géométrie*, par Ch. Dupin, la note de la page 305). »

COURS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PARTIE ÉLÉMENTAIRE.

PREMIÈRE LEÇON.

DES QUANTITÉS CONTINUES ET DES FONCTIONS.

1. — Quantités continues, positives et négatives.

On sait que la *grandeur continue*, ou ce qui fait que des choses d'une même espèce diffèrent généralement en plus ou en moins les unes des autres, devient susceptible d'être étudiée d'une manière exacte, et constitue le principal objet des *Mathématiques*, lorsqu'il est possible d'y discerner, au moins par la pensée, des parties égales d'une petitesse aussi grande qu'on le veut. L'exemple le plus simple qu'on en puisse donner est celui d'une ligne droite plus ou moins longue. Aussi représentons-nous volontiers les *quantités*, c'est-à-dire les choses où nous observons la grandeur avec ce degré de précision, par des droites ayant une extrémité fixe, l'autre, mobile, et pouvant offrir de la sorte, successivement, toutes les longueurs.

Ainsi definie, la quantité est dite *simple* ou à une seule dimension (comme la droite qui l'exprime), ou encore *réelle*, par opposition à d'autres conceptions mathématiques plus compliquées, qualifiées de *quantités imaginaires* parce qu'on a été longtemps sans savoir se les représenter, mais qu'il convient plutôt d'appeler *quantités complexes*, vu qu'elles ont, outre la grandeur, un autre attribut, analogue

à ce caractère des figures géométriques, exprimé par leurs angles, qu'on appelle la *forme*, et parce qu'elles peuvent, par suite, varier suivant plusieurs sens. Mais les principaux progrès de la Science, jusqu'à ce jour, ont été obtenus en réduisant, au contraire, toutes les choses susceptibles de changement, à des éléments assez simples pour ne pouvoir plus varier que comme une droite, c'est-à-dire en plus ou en moins, dans un sens ou dans le sens contraire. C'est ainsi que l'on tâche, en Géométrie, de ramener la connaissance des figures à celle de leurs dimensions linéaires, et qu'un des plus grands progrès qu'on y ait jamais faits a été de définir la situation de leurs divers points par quelque chose comme des dimensions, savoir, au moyen des coordonnées de ces points par rapport à un système d'axes. Aussi nous en tiendrons-nous ici à ce point de vue et n'introduirons-nous, en général, dans nos formules, que des quantités simples (¹).

Pour arriver à la notion complète de la quantité simple, il faut se représenter la droite qui exprime les grandeurs comme ayant son extrémité fixe très loin de la région où se trouve d'ordinaire l'extrémité mobile, et comme allant d'abord de l'extrémité fixe à un point connu de cette région, appelé l'*origine,* à partir duquel elle se prolonge ensuite jusqu'à tout autre point situé au delà, ou décroît jusqu'à tout autre point situé en deçà, cet autre point étant, dans les deux cas, l'extrémité mobile. Les diverses valeurs de la quantité considérée ne diffèrent les unes des autres que par ce prolongement ou ce décroissement, qui suffisent par conséquent à les distinguer entre elles. Aussi convient-on de ne pas faire attention à la partie commune, comprise depuis l'extrémité fixe, qu'on se représente prise très loin et même *à l'infini,* jusqu'à l'origine donnée : la connaissance directe qu'on est censé avoir de la situation de cette origine en tient lieu. Et chaque état de la grandeur en question se trouve ainsi défini par la longueur même qu'il faut *ajouter* ou *retrancher,* c'est-à-dire porter au delà ou en deçà de l'origine, pour atteindre la situation effective correspondante de l'extrémité mobile. Or les quantités sur lesquelles on raisonne d'ordinaire, et que l'on introduit dans les formules, sont justement soit celles que représentent ces longueurs à ajouter ou à retrancher, soit les parties de sens divers en lesquelles on peut avoir besoin de les décomposer. On s'explique donc que les signes + ou — s'y incorporent, et qu'on les qualifie respectivement de *positives* ou de *négatives*, pour indiquer si elles apportent à une grandeur, en s'y

(¹) Une note donnera cependant, vers la fin de la Troisième Leçon, dans la Partie complémentaire, un aperçu de ces quantités complexes.

adjoignant, une augmentation ou une diminution. On leur fait ainsi exprimer le sens suivant lequel les droites qui les représentent doivent être menées ou à partir de l'origine, quand elles sont seules, ou à la suite les unes des autres, quand plusieurs se trouvent additionnées algébriquement, c'est-à-dire mises ensemble telles quelles, avec leur attribut propre de quantités *augmentatives* ou de quantités *diminutives*.

La série continue et croissante des grandeurs s'étendra donc, comme l'a remarqué Descartes, de $-\infty$ à $+\infty$, en passant par zéro.

2. — Évaluation des quantités : leur distinction en incommensurables et commensurables.

L'idée de grandeur n'acquiert, avons-nous dit, toute la précision désirable, que dans les *quantités*, où l'on peut discerner, au moins par la pensée, des parties égales de telle petitesse que l'on veut. Alors, en effet, l'une de ces parties, d'une grandeur supposée connue, peut être prise comme *mesure* ou terme de comparaison; et, si l'on compte combien de fois elle se trouve dans les quantités en question, puis qu'on évalue, à l'aide d'une *unité* plus petite contenue exactement dans la première mesure, les restes inévaluables par celle-ci, et ainsi de suite, on réduira les quantités proposées, avec une approximation indéfinie, à des *nombres*, qui sont ce qu'il y a de plus simple et de plus clair pour l'esprit. Seulement, l'*échelle* ou succession des nombres exprimés au moyen de la plus petite unité employée croît par *degrés* finis, égaux à cette unité même, tandis que l'échelle des quantités croît par degrés inappréciables, sans comparaison moindres. Il n'y a, par suite, qu'une chance infiniment faible pour que l'évaluation numérique d'une quantité se fasse sans reste, même en essayant successivement toutes les unités de plus en plus petites possibles, mais constamment en nombre fini tant qu'elles sont finies elles-mêmes, qui se trouvent exactement contenues dans la plus grande mesure proposée.

Donc, en général, une quantité ne peut s'exprimer en nombre qu'avec une approximation indéfiniment croissante : on la qualifie alors d'*incommensurable*, par opposition aux cas exceptionnels où elle est *commensurable*, c'est-à-dire capable d'être évaluée exactement au moyen d'une unité fournie par une division, en parties égales, de la mesure donnée.

Quoi qu'il en soit, c'est par son expression numérique, soit exacte, soit censée complétée ou prolongée idéalement jusqu'à l'infini quand elle est seulement approchée, que chaque quantité figure dans les

formules mathématiques. Ainsi l'on y introduit invariablement, à la place de la quantité, son *rapport* à une quantité déterminée de la même espèce, prise pour unité ou mesure, rapport évidemment susceptible, comme la quantité proposée elle-même, de passer avec continuité par tous les états de grandeur entre $-\infty$ et $+\infty$. Il constitue, par conséquent, une catégorie de quantités plus abstraites que toutes les autres et servant à leur évaluation. Comme cette catégorie comprend tous les nombres possibles entiers ou fractionnaires, on qualifie parfois de *nombres* toutes les quantités même incommensurables qui s'y trouvent.

3. — Quantités limites d'autres quantités variables. Opérations algébriques sur les quantités.

La série illimitée des nombres, de moins en moins différents les uns des autres, qui constituent les expressions de plus en plus approchées d'une certaine quantité, peut être considérée comme représentant les valeurs successives prises par une autre quantité, *variable*, qui s'approcherait indéfiniment de cette quantité *fixe*. Aussi appelle-t-on celle-ci la *limite* des nombres considérés ou de la quantité variable.

En général, *toutes les fois qu'une quantité prend successivement une infinité de valeurs, mais en finissant par varier de moins en moins, au point qu'une de ses valeurs, assez éloignée, diffère aussi peu que l'on veut de toutes celles qui viennent après, la vue de cette quantité variable fait naître dans notre esprit l'idée d'une quantité fixe dont elle s'approche indéfiniment, et qui est dite sa limite.* La limite en question est d'ailleurs parfaitement déterminée, ou unique, quoique la quantité variable qui nous fournit l'occasion de la connaître ne parvienne pas à l'exprimer exactement, parce que cette quantité variable, sans s'y fixer jamais tout à fait, finit par ne plus quitter son voisinage, et un voisinage de plus en plus resserré où ne pourraient pas se trouver *indéfiniment* comprises deux quantités fixes distinctes, ayant entre elles une différence autre que zéro.

On sait que les opérations arithmétiques ou algébriques, effectuées sur des nombres quelconques (généralement fractionnaires), donnent des résultats qui varient avec ces nombres, mais aussi peu que l'on veut quand ces nombres varient eux-mêmes suffisamment peu. Et l'on peut en dire autant quand la nature de l'opération change d'une manière presque insensible, comme quand, par exemple, on fait varier d'une fraction extrêmement petite ε l'exposant n d'une quantité don-

née a; ce qui revient à multiplier le résultat précédent a^n par un facteur, a^ε, sensiblement égal à 1. Au reste, et justement à cause de ce fait que le résultat varie, avec n, par degrés insensibles, toutes les combinaisons d'élévations à des puissances et d'extractions de racines qu'indique l'expression a^n peuvent être censées constituer une même opération générale, dont ces diverses élévations et extractions ne seraient que des cas particuliers.

Ainsi, une opération quelconque, effectuée successivement en prenant pour données les valeurs numériques de plus en plus approchées de certaines quantités, finira par donner des résultats dont chacun différera aussi peu que l'on voudra de tous ceux qui viendront après. Autrement dit, à mesure que les données de l'opération *tendront* vers leurs limites, c'est-à-dire vers les quantités généralement incommensurables que l'on considère, les résultats tendront aussi vers une quantité limite parfaitement déterminée. Celle-ci sera dite le résultat de l'opération, censée effectuée sur les quantités elles-mêmes, et, cela, en vertu d'un *principe* naturel d'*unité*, souvent appliqué même à notre insu, qui nous porte notamment à voir ou à introduire, partout où elle est possible, la *continuité*, c'est-à-dire le changement par nuances insensibles à défaut de l'uniformité, et à fixer, en conséquence, le sens des mots, dans les cas où il ne l'est pas encore, *de manière que l'on puisse dire des limites ce que l'on dit déjà de quantités en approchant indéfiniment.*

On voit que le résultat d'opérations effectuées sur des quantités s'obtiendra numériquement, avec une approximation proportionnée à celle qu'atteindront les expressions numériques des quantités données elles-mêmes, en opérant sur ces expressions d'après les règles démontrées en Arithmétique et en Algèbre pour les nombres.

4. — Des séries convergentes.

Un des exemples les plus utiles qu'on puisse donner de quantités limites est celui des séries convergentes.

On sait qu'une *série* est, par définition, la somme algébrique de toute suite indéfinie de termes formés d'après une certaine loi, et qu'on la dit *convergente* lorsque cette somme tend vers une limite quand on y prend de plus en plus de termes, *divergente* dans les cas contraires, soit que cette somme grandisse indéfiniment en valeur absolue, soit seulement qu'elle oscille, sans fin, entre deux limites finies plus ou moins écartées. Par exemple, les termes a, aq, aq^2, aq^3, ... d'une progression géométrique, termes dont les n premiers ont la

somme $a\frac{1-q^n}{1-q}$, forment : 1° une série convergente ayant pour valeur limite $\frac{a}{1-q}$, quand la raison q est comprise entre -1 et $+1$; 2° une série divergente, dans tous les autres cas, même dans celui, $q=-1$, où la somme $a+aq+aq^2+\ldots$ oscille, sans converger ni précisément diverger, entre les deux limites fixes a et zéro.

Les séries convergentes seules présentent un grand intérêt, dû surtout à ce que leur *valeur*, c'est-à-dire la limite vers laquelle tend la somme de leurs termes, est souvent une quantité difficile à évaluer autrement que par approximation au moyen de ces séries mêmes, c'est-à-dire en faisant la somme d'un nombre assez grand de leurs termes pris dans l'ordre où ils se suivent (sauf à y adjoindre, si c'est possible, une évaluation approximative de l'ensemble des autres). On peut même dire que l'expression numérique approchée de toute quantité incommensurable ne s'obtient jamais qu'en série; car elle se compose d'autant de termes, de plus en plus petits, qu'il y a d'unités, sous-multiples ou parties aliquotes les unes des autres, employées successivement pour mesurer les restes toujours réduits, mais toujours subsistants.

D'après le caractère, énoncé ci-dessus, des quantités qui tendent vers des limites, une série

$$S=u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

sera convergente, si la somme

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$$

des $n+1$ premiers termes diffère aussi peu qu'on veut, pour n assez grand, de celle des $n+1+p$ premiers termes

$$S_{n+p}=S_n+(u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}),$$

et, cela, quel que soit le nombre entier positif p. Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante de convergence est que la somme*

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}$$

d'un nombre quelconque, si grand qu'il soit, de termes consécutifs, devienne aussi petite que l'on voudra quand ces termes sont tous pris suffisamment éloignés.

On en déduit les conséquences suivantes :

1° Dans une série convergente, la valeur absolue des termes s'approche indéfiniment de zéro à mesure que leur numéro d'ordre dans la série s'élève;

2° Une interversion quelconque dans l'ordre des termes ne change pas la valeur limite de la somme, *pourvu que*, lorsque n grandit indéfiniment, les termes que l'interversion fait disparaître de S_n et ceux qu'elle y introduit à la place se trouvent être en nombre *limité* et soient tous de ces termes très éloignés tendant vers zéro;

3° Lorsque tous les termes très éloignés sont de même signe, le nombre de ceux d'entre eux que l'interversion introduit dans S_n ou en fait disparaître peut même croître arbitrairement avec n, sans que la valeur limite de la série change, parce que, d'une part, tous ces termes très éloignés sont de ceux qui, ajoutés en nombre quelconque (dans l'ordre où ils se suivent quand on écrit la série de la première manière), donnent un total extrêmement petit, nul à la limite, et que, d'autre part, tous étant de même signe, la somme partielle de certains d'entre eux, choisis comme on voudra, est encore moindre;

4° Le nombre des termes très éloignés qui sont introduits ou supprimés par le fait de l'interversion peut encore, pour la même raison, grandir indéfiniment avec n, quand la série a ses termes très éloignés de signes divers, mais assez rapidement décroissants pour que, si on les prenait tous en valeur absolue, ils continuassent à former une série convergente;

5° Au contraire, *l'interversion ne peut plus toujours porter sur un nombre de termes indéfiniment croissant avec n, quand la série ne doit sa convergence qu'à ce qu'elle exprime l'excédent de termes d'un certain signe sur d'autres presque aussi forts de signe contraire,* termes tendant sans doute vers zéro, mais assez lentement pour que la somme partielle des uns ou des autres grandisse sans limite et pour que, par suite, un nombre très grand d'entre eux, pris même très éloignés, puisse former un total sensible.

Ces dernières séries, dont le maniement exige, comme on voit, des précautions, sont quelquefois dites *semi-convergentes,* pour exprimer que la rapidité de décroissement de leurs termes successifs est, par elle-même, insuffisante pour assurer leur convergence, et que celle-ci est due en outre à l'ordre dans lequel se succèdent ces termes. Mais on peut appeler encore *semi-convergentes* des séries, *divergentes* ou non, dont la somme, tant qu'on ne dépasse pas un nombre déterminé de termes, s'approche de certaines quantités au point de n'en plus différer d'une manière sensible, pour s'en écarter ensuite dès que ce nombre de termes est dépassé. De pareilles séries sont parfois d'une très grande utilité, comme moyen pratique d'évaluer les quantités en question.

On sait que la convergence d'une série à termes de même signe,

positifs par exemple, se reconnaît en cherchant si quelque autre série, d'une convergence déjà constatée, n'aurait pas ses termes très éloignés plus grands que les siens. Quand cela est, la somme

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p},$$

décroissante par hypothèse jusqu'à zéro, dans cette seconde série, lorsque n grandit, l'est à plus forte raison dans la série proposée, qui se trouve être, par conséquent, convergente aussi; de plus, le *reste* ou *terme complémentaire*, c'est-à-dire ce qu'il faudrait ajouter à

$$S_n = u_0+u_1+\dots+u_n$$

pour avoir la somme limite S ou *valeur* de la série, reste que je désignerai par R_n, est, de même, moindre dans la série proposée que dans celle à laquelle on la compare, car il égale la limite vers laquelle tend la somme $u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}$ lorsque n y est fixe et que p y croît indéfiniment. On peut d'ailleurs, pour simplifier, supposer les termes rangés par ordre de grandeur décroissante, attendu que leur interversion n'influe, comme on vient de voir, ni sur la nature ni sur la valeur de la série.

Or on connaît deux séries simples convergentes, à termes de même signe, pouvant ainsi servir de type dans l'étude de l'expression

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}.$$

La première est la série

$$u_{n+1}+u_{n+1}q+u_{n+1}q^2+\dots=\frac{u_{n+1}}{1-q},$$

formée par les termes d'une progression géométrique ayant sa raison q quelconque entre zéro et 1. Comme le rapport d'un terme au précédent y est q, *chaque fois que,* dans l'expression proposée $u_{n+1}+u_{n+2}+\dots$ qui a le même premier terme u_{n+1}, *le rapport d'un terme au précédent égalera au plus un certain nombre q inférieur à l'unité,* cette expression sera évidemment inférieure à la somme précédente $\frac{u_{n+1}}{1-q}$ et tendra, par conséquent, vers zéro avec u_{n+1}, c'est-à-dire quand n grandira indéfiniment. *La série* $u_0+u_1+\dots$ *sera* donc alors *convergente,* et, si l'on en borne le calcul approché aux termes compris depuis u_0 jusqu'à u_n inclusivement, l'erreur commise R_n se trouvera moindre que le quotient du premier terme négligé u_{n+1} par $1-q$.

Dans le cas contraire, relativement exceptionnel, où le rapport de chacun des termes u_{n+2}, u_{n+3}, ... au précédent u_{n+1}, u_{n+2}, ... ne reste pas égal ou inférieur à un nombre déterminé q compris entre

zéro et 1, mais s'approche indéfiniment de l'unité à mesure que n grandit, on peut le plus souvent décider de la convergence ou de la divergence de la série proposée en la comparant à celle-ci, qui constitue le second type simple annoncé,

$$(1)\qquad \frac{a}{1^m}+\frac{a}{2^m}+\frac{a}{3^m}+\frac{a}{4^m}+\frac{a}{5^m}+\ldots+\frac{a}{n^m}+\ldots,$$

où m est un exposant positif et où le rapport du $n^{\text{ième}}$ terme au $n-1^{\text{ième}}$ a pour expression $\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$. Cette série est convergente pour toutes les valeurs de m supérieures à l'unité : car alors, si l'on y groupe les termes de la manière suivante

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(\frac{a}{1^m}\right)+\left(\frac{a}{2^m}+\frac{a}{3^m}\right)+\left(\frac{a}{4^m}+\frac{a}{5^m}+\frac{a}{6^m}+\frac{a}{7^m}\right) \\ \qquad +\left(\frac{a}{8^m}+\ldots+\frac{a}{15^m}\right)+\left(\frac{a}{16^m}+\ldots+\frac{a}{31^m}\right)+\ldots, \end{cases}$$

puis qu'on remplace chaque terme d'un groupe quelconque par le premier et plus fort terme du même groupe, ce qui donne évidemment l'expression

$$\frac{a}{1^m}+\frac{2a}{2^m}+\frac{4a}{4^m}+\frac{8a}{8^m}+\frac{16a}{16^m}+\ldots,$$

cette expression n'est autre qu'une progression géométrique décroissante,

$$a+\frac{a}{2^{m-1}}+\frac{a}{(2^{m-1})^2}+\frac{a}{(2^{m-1})^3}+\frac{a}{(2^{m-1})^4}+\ldots=\frac{a}{1-\frac{1}{2^{m-1}}}=\frac{2^{m-1}}{2^{m-1}-1}a.$$

Donc la série moindre (1) est, à plus forte raison, convergente ; et si, $\frac{a}{n^m}$ étant le premier terme qu'on y regarde comme négligeable, l'on prend, pour simplifier, n égal à une puissance de 2 ou de la forme $n=2^p$, en sorte que le calcul approché de la série se fasse, dans (2), en employant, depuis $\frac{a}{1^m}$ jusqu'à $\frac{a}{(2^p-1)^m}$, un nombre exact p de groupes, l'erreur commise sera moindre que la somme d'une progression ayant pour premier terme $\frac{a}{2^{p(m-1)}}$, ou $\frac{a}{n^{m-1}}$, et pour raison $\frac{1}{2^{m-1}}$. On aura donc

$$(3)\qquad (\text{pour } n=2^p)\qquad \frac{a}{n^m}+\frac{a}{(n+1)^m}+\ldots<\frac{2^{m-1}}{2^{m-1}-1}\,\frac{a}{n^{m-1}}.$$

Cela étant, admettons que, dans la série proposée $u_0+u_1+u_2+\ldots,$

où le rapport du terme u_{n+1} au précédent u_n tend vers l'unité quand n grandit, ce rapport, pour n très grand, ne dépasse jamais $\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$, m désignant un exposant fixe convenablement choisi mais supérieur à 1. Les termes de cette série très éloignés décroîtront donc, de l'un à l'autre, pour le moins aussi vite ou dans un rapport aussi grand qu'ils le font dans la série type (1), supposé que l'on y donne à m la valeur dont il est question et qu'on y fasse correspondre le terme $\frac{a}{n^m}$ à u_{n+1}. Par conséquent, la série proposée sera convergente; et il suffira de prendre, dans (3), $a = n^m u_{n+1}$, pour que le premier membre de cette inégalité (3), qui alors commencera par u_{n+1}, soit évidemment, terme à terme, aussi fort ou plus fort que l'expression

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \mathrm{R}_n.$$

Par suite, l'erreur, R_n, commise sur la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ en la réduisant à $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, aura, d'après le second membre de (3) où $a = n^m u_{n+1}$, sa limite supérieure donnée par la formule

$$(4) \qquad (\text{pour } n = 2^p) \qquad \mathrm{R}_n < \frac{2^{m-1}}{2^{m-1}-1}(nu_{n+1}).$$

Quand, au contraire, dans la série proposée $u_0 + u_1 + \ldots$, le rapport d'un terme très éloigné quelconque u_{n+1} au terme précédent u_n atteint la valeur $1-\frac{1}{n}$ ou, *a fortiori*, une valeur de la forme $\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$, dans laquelle l'exposant m serait moindre que 1, la série diverge; car, bien que ses termes puissent encore tendre vers zéro, leur somme grandit sans limite. En effet, les termes dont il s'agit ne décroissent pas plus vite qu'il n'arrive dans la série, dite *harmonique*,

$$(5) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

où le rapport du $n^{\text{ième}}$ terme au précédent est justement $1-\frac{1}{n}$. Or, en groupant comme il suit les termes de cette série autres que le premier,

$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots,$$

et puis remplaçant chaque terme d'un groupe quelconque par le dernier du même groupe, il vient l'expression moindre

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \ldots,$$

composée, comme on voit, d'un nombre indéfini de termes égaux tous à $\frac{1}{2}$. Donc cette expression et, *a fortiori*, la série harmonique (5), ainsi que la proposée à termes non moins lentement décroissants, sont divergentes.

Quant aux séries à termes les uns positifs et les autres négatifs, on sait que, si elles sont convergentes en prenant tous leurs termes avec le même signe, elles le seront à plus forte raison en les prenant avec des signes variés, car la valeur absolue de l'expression

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}$$

y deviendra encore moins sensible; et que l'erreur, R_n, commise en s'arrêtant au terme u_n inclusivement, y sera de même plus voisine de zéro qu'elle n'est quand tous les termes sont de même signe.

Mais on sait aussi que cette convergence de la somme absolue des termes n'est pas nécessaire pour que la série proposée tende vers une limite. Par exemple, *toute série à termes décroissants, alternativement positifs et négatifs, est convergente dès que ses termes successifs s'approchent indéfiniment de zéro.* La raison en est que l'expression $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}$ est alors, à un ou deux termes près, positive ou négative à volonté; car, si on l'écrit

$$(u_{n+1} + u_{n+2}) + (u_{n+3} + u_{n+4}) + \dots,$$

en abstrayant le dernier terme dans le cas où le nombre p serait impair, tous les groupes entre parenthèses seront des différences arithmétiques affectées du même signe que le terme u_{n+1}, tandis que si, au contraire, abstrayant le terme u_{n+1} et parfois aussi le terme u_{n+p}, on l'écrivait

$$(u_{n+2} + u_{n+3}) + (u_{n+4} + u_{n+5}) + \dots,$$

tous les groupes entre parenthèses seraient des différences arithmétiques de même signe que u_{n+2} et, par conséquent, d'un signe contraire au précédent. Ainsi, l'expression en question diffère aussi peu qu'on veut de zéro pour n assez grand, et la série est bien convergente. De plus, si l'on fait croître p indéfiniment, ce qui revient à poser $u_{n+p} = 0$, la même expression $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ devient l'erreur R_n commise en prenant pour valeur approchée de la série la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$, et le même raisonnement, qui consiste ici à écrire R_n sous les deux formes

$$(u_{n+1} + u_{n+2}) + (u_{n+3} + u_{n+4}) + \dots,$$
$$u_{n+1} + (u_{n+2} + u_{n+3}) + (u_{n+4} + u_{n+5}) + \dots$$

prouve, d'une part, que R_n a le signe de u_{n+1}, d'autre part, que la différence $R_n - u_{n+1}$ a le signe contraire, et que, par conséquent, cette erreur commise, R_n, est comprise entre zéro et le premier terme négligé u_{n+1}.

Un cas simple, qu'il importe de remarquer, est celui où les termes de la série, que je désignerai respectivement par $a, -b, c, -d, e, -f, g, \ldots$, ont leurs valeurs absolues $a, b, c, d, e, f, g, \ldots$ assez peu et assez régulièrement décroissantes de l'une à l'autre pour que ces décroissements successifs $a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-e$, ... soient, chacun comparé au suivant, dans des rapports très peu différents de l'unité. En effet, si l'on considère les rapports ainsi formés, pris de deux en deux,

$$\frac{a-b}{b-c}, \quad \frac{c-d}{d-e}, \quad \frac{e-f}{f-g}, \quad \ldots,$$

jusqu'à un, extrêmement éloigné, qui soit formé avec des termes de la série très petits ou insignifiants, et si l'on ajoute respectivement, d'une part, les numérateurs de ces rapports, d'autre part, leurs dénominateurs (tous de même signe), le nouveau rapport obtenu

$$\frac{a-b+c-d+e-f+\ldots}{b-c+d-e+f-g+\ldots}$$

se trouvera compris, d'après un théorème connu (¹), entre le plus petit

---

(¹) Ce théorème, que nous aurons à appliquer plusieurs fois, s'énonce ainsi :

Quand on ajoute terme à terme un nombre quelconque de rapports

$$\frac{b_1}{a_1} = q_1, \quad \frac{b_2}{a_2} = q_2, \quad \ldots, \quad \frac{b_n}{a_n} = q_n,$$

ayant leurs dénominateurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *tous de même signe, le rapport obtenu* $\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ *est compris entre le plus petit et le plus grand des proposés.*

Effectivement, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont, par exemple, positifs, en appelant q le plus petit et Q le plus grand de ces rapports $q_1, q_2, \ldots, q_n$, les égalités évidentes

$$b_1 = a_1 q_1, \quad b_2 = a_2 q_2, \quad \ldots, \quad b_n = a_n q_n$$

donneront, d'une part,

$$b_1 > a_1 q, \quad b_2 > a_2 q, \quad \ldots, \quad b_n > a_n q,$$

d'autre part,

$$b_1 < a_1 Q, \quad b_2 < a_2 Q, \quad \ldots, \quad b_n < a_n Q,$$

et le plus grand de tous les rapports donnés et, par conséquent, égalera sensiblement, comme eux, l'unité. Or, en appelant S la valeur $a - b + c - d + \dots$ de la série (d'où $b - c + d - e + \dots = a - S$), il vient ainsi

$$\frac{S}{a - S} = 1 \quad \text{ou} \quad S = \frac{a}{2}.$$

Donc *la série considérée* $a - b + c - d + \dots$, *à termes alternativement positifs et négatifs ne décroissant que très peu de l'un à l'autre, égale sensiblement la moitié de son premier terme* a, c'est-à-dire la moyenne arithmétique des deux limites, a et zéro environ, entre lesquelles oscille d'abord la somme de ces termes consécutifs. C'est bien ce qu'on vérifie sur la progression

$$1 - r + r^2 - r^3 + \dots = \frac{1}{1 + r},$$

quand on fait tendre vers -1 la raison $-r$, supposée inférieure à l'unité en valeur absolue.

Devant bientôt rencontrer plusieurs exemples de séries, je me bornerai pour le moment, en ce qui les concerne, au précédent résumé, destiné à remettre en mémoire leurs propriétés principales étudiées déjà dans un cours antérieur.

3. — Définition de la longueur d'un arc de courbe.

La plus importante des quantités géométriques auxquelles conduit la notion de limite est la longueur d'un arc de courbe.

---

et, par suite, en ajoutant respectivement les inégalités de même sens,

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n > (a_1 + a_2 + \dots + a_n) q, \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n < (a_1 + a_2 + \dots + a_n) Q.$$

Divisons celles-ci par la quantité positive $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, et il viendra

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \begin{cases} > q, \\ < Q, \end{cases}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ étaient négatifs, on les rendrait positifs en prenant les rapports proposés sous la forme

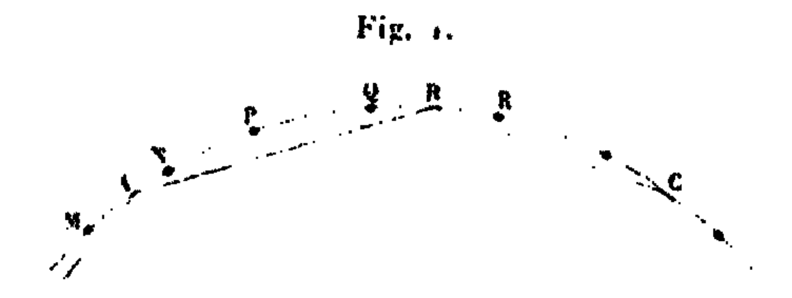
$$\frac{-b_1}{-a_1}, \quad \frac{-b_2}{-a_2}, \quad \dots, \quad \frac{-b_n}{-a_n},$$

et l'on donnerait finalement au résultat obtenu, $\frac{-(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}{-(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}$, la forme demandée $\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$.

Nous avons tous l'intuition immédiate de ce qu'est un arc de courbe, c'est-à-dire le lieu formé par une succession continue de points, et ayant en chacun de ces points une direction déterminée. limite commune des directions de toutes les cordes très petites dont les extrémités tendent vers le point dont il s'agit; d'où il suit que cette direction, marquée par la *tangente,* change aussi peu qu'on veut d'un point de la courbe à un autre assez voisin, comme étant, en ces deux points, extrêmement peu inclinée par rapport à la corde qui les joint. Mais l'idée de la longueur d'un pareil arc, en tant qu'il est évaluable au moyen d'une unité rectiligne dont aucune partie ne peut cependant lui être superposée, constitue une conception beaucoup moins nette.

Pour la définir, il n'y a qu'à considérer l'arc proposé MC... (*fig.* 1) comme la position limite d'une ligne variable, à côtés rectilignes de plus en plus petits se coupant sous des angles de plus en plus ouverts, dont la longueur totale tendrait vers une valeur déterminée, et à prendre cette valeur comme expression même de la longueur de l'arc, en vertu du principe d'unité et de continuité énoncé plus haut (p. 5). Or on y parvient en traçant la ligne polygonale en question, MNPQR..., dans le voisinage de l'arc, et de manière que sa direction diffère partout très

Fig. 1.



peu de celle de la tangente, comme il arrivera, par exemple, si l'on joint successivement par des lignes droites un nombre de plus en plus grand de points, M, N, P, Q, R, ... de l'arc. Dès que la ligne polygonale MNPQ... ainsi formée a ses côtés assez nombreux pour qu'elle passe, partout, à des distances de l'arc incomparablement moindres qu'une petite corde donnée quelconque AB, sa partie comprise entre A et B ou, plus précisément, depuis son point (que j'appellerai A') le plus proche de A, jusqu'à son point (que j'appellerai B') le plus proche de B, ne varie plus désormais que d'une fraction très faible de sa valeur ([1]). En effet, si l'on projette cette partie sur la

([1]) A' et B' sont donc les pieds des perpendiculaires abaissées des points *fixes* A et B de la courbe sur les côtés voisins MN et QR de la ligne polygonale va-

petite corde AB, les divers côtés, A'N, NP, PQ, QB', qui la composent, ne faisant avec AB que des angles très faibles (comme ceux de AB avec les tangentes en A ou en B), se projettent presque en vraie grandeur ou ont avec leurs projections des rapports très peu différents de l'unité; d'où il suit, à cause d'un théorème précédent (note de la p. 12), que la ligne A'B' tout entière, somme des numérateurs des rapports considérés, est à sa projection totale sur AB, somme des dénominateurs, dans un rapport intermédiaire, non moins voisin de 1 par conséquent, ou que A'B' dépasse sa projection totale sur AB d'une portion relativement fort petite de sa longueur. Et comme, de plus, cette projection totale commence à un point très voisin de A pour se terminer à un autre très voisin de B, ou ne diffère elle-même de AB que par une minime fraction de sa valeur, la partie considérée A'B' de la ligne polygonale ne peut présenter également avec AB qu'une différence incomparablement plus faible que AB, c'est-à-dire, égale à une fraction de AB aussi petite que l'on voudra, pourvu que AB ait déjà été pris suffisamment petit. Donc, à mesure que décroîtront les côtés de la ligne polygonale et que celle-ci s'approchera de l'arc proposé de courbe, sa partie appelée ici A'B' ne pourra désormais varier que dans une proportion extrêmement faible; et, comme il en sera de même de toutes ses autres parties, correspondant à d'autres petites cordes BC, ..., la ligne polygonale tout entière, dont les extrémités seront ou deviendront à la limite celles de l'arc proposé, ne variera pareillement, dans sa longueur totale, que d'une fraction très petite aussi de cette longueur, laquelle se trouve évidemment finie comme la distance de deux de ses points pris aussi éloignés que possible l'un de l'autre. En effet, la somme des numérateurs, A'B', B'C', ..., de rapports presque égaux à 1 ayant pour dénominateurs AB, BC, ..., formera avec la somme de ceux-ci, toujours d'après le même théorème, un nouveau rapport non moins voisin de l'unité.

Ainsi, toutes ces lignes polygonales à côtés très petits n'ont pas des longueurs sensiblement différentes, et le caractère énoncé à l'avant-dernier numéro (p. 4), comme nécessaire et suffisant pour qu'elles admettent une limite, se trouve bien vérifié. Donc la longueur de l'arc, identique à cette limite, est une quantité parfaitement déterminée, comme on se proposait de l'établir.

Observons encore que, si les sommets de la ligne polygonale

---

riable MNPQ ..., perpendiculaires mesurant en A et B les écarts de cette ligne d'avec la courbe et très petites, par hypothèse, en comparaison de AB.

MNPQ..., supposée variable, deviennent de plus en plus proches chacun du précédent, la partie de cette ligne appelée A'B' tendra vers l'arc AB sans que son rapport à la corde AB s'écarte jamais sensiblement de l'unité ; donc on aura aussi $\frac{\text{arc AB}}{\text{corde AB}} = 1$ avec une erreur aussi faible qu'on le voudra, pourvu que la corde AB soit assez petite ; d'où résulte le théorème suivant :

Dans toute portion de courbe où la direction de la tangente ne varie nulle part brusquement d'un point à l'autre, le rapport d'un arc quelconque à sa corde tend vers l'unité quand l'arc tend vers zéro.

Ce théorème est, comme on verra, fondamental dans l'étude des courbes.

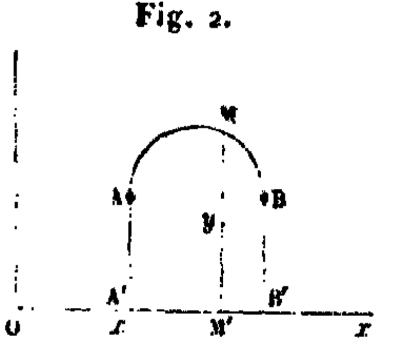
6. — Des fonctions.

Parmi les quantités que l'on considère dans une étude mathématique, les unes sont *constantes*, toujours les mêmes, les autres sont *variables*, ou reçoivent successivement une infinité de valeurs différentes, se succédant d'ordinaire avec continuité, c'est-à-dire par degrés ou accroissements (soit positifs, soit négatifs) inférieurs à tout petit nombre donné. Parfois aussi certaines quantités restent les mêmes pendant les changements de celles que l'on fait varier d'ordinaire, mais leur valeur peut être choisie à volonté parmi une infinité, et il arrive qu'on doit leur attribuer toutes ces valeurs chacune à son tour, de sorte qu'elles sont constantes à un certain point de vue, variables à un autre : on les appelle des *paramètres*. Par exemple, quand il s'agit d'étudier un cercle, les coordonnées des divers points de cette courbe par rapport à un système de deux axes rectangulaires sont les *variables*, tandis que les coordonnées du centre et le rayon sont des *constantes*. Ces trois dernières quantités deviendraient des *paramètres*, si l'on devait examiner une infinité de cercles tracés dans le plan. Mais le rapport π de leur circonférence à leur diamètre, supposé qu'on eût à s'en occuper, resterait dans tous les cas une constante. Un tel rapport, quoique incommensurable ou ne comportant aucune expression numérique exacte, est, d'ailleurs, qualifié de *simple nombre*, pour exprimer qu'il reste invariable quand on change les unités ou mesures physiques employées.

Il n'est pas possible de donner arbitrairement des valeurs quelconques à toutes les variables d'une question, à cause des rapports existant entre elles et sans lesquels la question n'aurait pas de raison d'être. Certaines variables seules, dites *indépendantes*, peuvent directement recevoir telle valeur qu'on veut, du moins entre certaines limites :

c'est, par exemple, dans la demi-circonférence AMB, le cas de l'abscisse $OM' = x$, qui varie depuis OA' jusqu'à OB', A' et B' étant les pieds des ordonnées extrêmes AA' et BB'. Dès qu'on a choisi les valeurs de ces variables (indépendantes), les autres variables se trouvent déterminées ou fixées par le fait même; ce qu'on exprime en disant qu'elles sont *fonction* des premières, ou qu'elles en dépendent : on les appelle des *variables dépendantes* ou des *fonctions*. Telle est, dans la demi-circonférence AMB, l'ordonnée quelconque $M'M = y$, qu'on peut construire dès qu'on s'est donné l'abscisse $OM' = x$; on dira donc que cette ordonnée y est une fonction de la variable indépendante x.

Fig. 2.



Les diverses fonctions, à considérer, de variables $x, y, z, t, \ldots$, se représentent par une des lettres f, F, φ, ϖ, ψ, ..., qu'on fait suivre des lettres $x, y, z, t, \ldots$, séparées par des virgules et mises entre parenthèses; ainsi, $f(x)$, $F(x, y, z)$ désigneront deux fonctions dépendant, l'une, de x, l'autre, de x, y et z. Pour exprimer les valeurs particulières que prendront ces fonctions quand x, y, z y auront des valeurs spéciales désignées $x = a$, $y = b$, $z = c$, on écrira $f(a)$, ou $F(a, b, c)$; et de même dans tous les cas analogues. Ainsi, une égalité ou *relation*, comme $y = f(x)$ se lira *y égale f de x* et exprimera que la quantité y est une certaine fonction, désignée par f, de la quantité x.

On peut convenir de donner à la variable x, dont une autre variable $y = f(x)$ est fonction, les valeurs définies par une fonction, $\varphi(t)$, d'une troisième variable t : cette première variable $x = \varphi(t)$ se trouve donc être, tout à la fois, fonction par rapport à t et variable indépendante par rapport à y. On dit alors que $y = f(x)$ est une *fonction de fonction*. Si, de même, dans une fonction $u = f(x, y, z)$ de plusieurs variables x, y, z, celles-ci reçoivent les valeurs $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $z = \varphi_3(t)$, définies par des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ d'une autre variable t, on qualifiera u ou $f(x, y, z)$, de *fonction composée*.

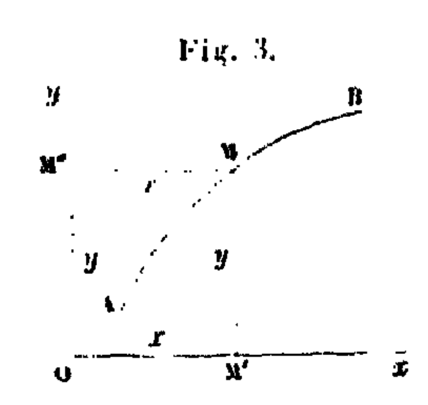
7. — Principaux modes de représentation des fonctions dans l'espace : fonctions inverses, fonctions de point, etc.

Notre intuition de l'espace et des figures qu'on peut y tracer nous fournit plusieurs exemples de fonctions tellement généraux, et sous

des formes tellement frappantes, qu'il est naturel de s'en servir comme de *types* pour *représenter* toutes les fonctions, c'est-à-dire pour mettre, en quelque sorte, sous les yeux l'ensemble de leurs valeurs.

Et d'abord, toute courbe AB, dans un plan, rapportée à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy par rapport auquel l'abscisse et l'ordonnée d'un quelconque M de ses points sont respectivement $OM' = x$ et $M'M = y$, exprime une certaine fonction; car, vu l'absence de largeur des lignes, la droite M'M ne coupe l'arc AB qu'en un seul point, ou, tout au plus, en des points isolés, dont chacun est, par suite, avec son ordonnée y, entièrement déterminé sur la *branche* de courbe qui le contient, dès qu'on donne l'abscisse $OM' = x$. On a donc $y =$ une certaine fonction, $f(x)$, de la variable x.

Fig. 3.



Réciproquement, étant donnée une fonction quelconque, $y = f(x)$, d'une seule variable, on pourra toujours, en prenant une unité de longueur, marquer successivement, sur Ox, des abscisses égales à toutes les valeurs de x, négatives ou positives, pour lesquelles la fonction $f(x)$ existe, et mener chaque fois, parallèlement à Oy, une ordonnée y égale (en grandeur et en signe) à la valeur correspondante de $f(x)$. Les secondes extrémités de toutes ces ordonnées constitueront une file de points, propre à *peindre* et même, une fois construite, à donner *graphiquement* toutes les valeurs de cette fonction. Or une pareille file, évidemment sans largeur, n'est autre chose qu'une courbe, quand la fonction $f(x)$ jouit des propriétés ordinaires de continuité dont il sera question plus loin. Ainsi, à toute fonction d'une variable, il correspond une courbe plane qui la figure.

Ce n'est pas seulement une fonction $y = f(x)$, mais deux fonctions, que représente une courbe, comme AMB, rapportée à deux axes Ox, Oy. Si, en effet, on prenait l'axe Oy pour axe des abscisses, l'abscisse $x = OM'$ de tout à l'heure deviendrait l'ordonnée M''M, tandis que la précédente ordonnée $M'M = OM''$ serait maintenant l'abscisse. La courbe AB, considérée dans la position qu'elle occupe par rapport à Oy, comme on le faisait tout à l'heure par rapport à Ox, exprime donc une seconde certaine fonction $x = \varphi(y)$, où les valeurs simultanées de la fonction et de la variable sont les mêmes que dans la précédente $y = f(x)$, mais avec interversion des rôles de x et de y. Cette fonction φ, aussi différente de la précédente f que sont inégales les deux figures OM''MB et OM'MB, est dite la *fonction inverse de f*.

La représentation d'une fonction par une courbe plane ne laisse

rien à désirer quand la fonction ne dépend que d'une seule variable. Et elle peut même s'appliquer aux cas où les variables sont en nombre quelconque, à la condition de prendre successivement chacune d'elles pour abscisse et de ne faire varier alors que celle-là. Mais, bien qu'on puisse, de la sorte, par un examen plus ou moins long, savoir comment la fonction se comporte quand plusieurs variables changent à la fois, il est préférable de chercher un mode de représentation où l'on voie d'un coup d'œil l'ensemble de toutes ses valeurs. La Géométrie le fournit encore quand il n'y a que deux variables, comme dans une fonction, z, de la forme $z=f(x,y)$, car toute surface rapportée à un système d'axes est l'expression d'une telle fonction.

Imaginons, par exemple, un plan des xy horizontal, dont chaque point P sera parfaitement défini (ou pourra être construit sans indécision) au moyen de ses deux coordonnées $OP'=x$ et $P'P=y$. Si, par ce point P, on mène une parallèle PM à l'axe vertical Oz, et qu'elle rencontre la surface proposée SS', celle-ci étant sans épaisseur n'aura de commun avec elle qu'un seul point M ou, tout au plus, des points isolés les uns des autres, qui pourront être censés appartenir à tout autant de *nappes* de la surface et seront ainsi parfaitement déterminés, chacun sur la nappe qui le contiendra. Donc, leur ordonnée ou altitude z, PM par exemple, sera bien une certaine fonction des variables x et y. Réciproquement, toute fonction $f(x,y)$ de ces deux variables permettra de construire, pour chaque système de valeurs de x et de y exprimé par un point comme P, une ordonnée $z=f(x,y)$, telle que PM; et l'extrémité M se déplacera peu à peu, quand x et y varieront, de manière à donner un lieu géométrique sans épaisseur, mais s'étendant, comme la portion correspondante du plan des xy, en longueur et largeur, si du moins la fonction $f(x,y)$ présente les conditions ordinaires de continuité que nous étudierons bientôt. Donc, pour toute fonction de deux variables, il existe une certaine surface qui la représente.

Fig. 4.

Quand les variables sont au nombre de trois, la Géométrie pure devient impuissante à figurer les fonctions d'une manière commode. Mais il suffit, pour en avoir une expression encore assez simple, de

joindre à l'intuition de l'étendue une notion *physique* très élémentaire, celle de la *densité* de la matière. On y arrive, par exemple, en imaginant une pulvérisation uniforme et une dissémination variée d'une substance très lourde, c'est-à-dire sa division en parties égales extrêmement ténues, suivie d'un éparpillement plus ou moins grand et arbitraire de ces parties dans l'espace. La densité est alors, aux divers points, un nombre proportionnel aux quantités de cette substance contenues dans les sphères décrites d'un même rayon donné très petit autour de ces points respectifs comme centres. Pour plus de simplicité et de précision, on se représente la matière comme continue, c'est-à-dire répartie jusque dans les plus petites portions de son étendue apparente, et, imaginant alors que le rayon de la petite sphère décroisse jusqu'à zéro, on prend comme densité en chaque point la limite du rapport de la quantité de matière contenue dans la sphère qui a ce point comme centre, à la quantité analogue contenue dans celle dont le centre est un certain point choisi.

Grâce à cette idée de densité, on obtient une expression commode d'une fonction quelconque, $\rho = f(x, y, z)$, de trois variables x, y, z, en se représentant l'espace rapporté à trois axes rectangulaires des x, y, z, puis, après avoir noté les systèmes de valeurs de x, y, z pour lesquels existe la fonction $f(x, y, z)$, en concevant que les endroits dont les coordonnées x, y, z égalent ces systèmes de valeurs soient occupés par une matière d'autant plus *dense* ou massive que la valeur correspondante de la fonction $\rho = f(x, y, z)$ est plus grande. Comme une pulvérisation et une dissémination convenables d'une substance assez lourde donnent des matières de densités quelconques, rien n'empêche, effectivement, de s'en figurer une qui ait sa densité en chaque point (x, y, z) de l'espace, exprimée justement par la fonction proposée ρ.

Une telle quantité ρ, dont les diverses valeurs $f(x, y, z)$ sont censées exister aux différents points (x, y, z) de l'espace, a été appelée par Lamé une *fonction de point*. La densité, qui ne suppose que la notion de corps réduite le plus possible en fait de propriétés concrètes, est, quant à sa nature, la moins compliquée de ces fonctions; mais la Mécanique et la Physique en étudient bien d'autres, comme la température, l'intensité de la pesanteur, etc. Tous les phénomènes naturels se produisant dans les diverses régions de l'espace, on conçoit que leur expression mathématique se résolve toujours en un certain nombre de fonctions de point.

On peut se représenter une matière, étalée, en couche très mince ou sans épaisseur sensible, sur un plan contenant deux axes rectangu-

laires de coordonnées x et y, et lui attribuer une densité aux divers points (x, y), en décrivant autour de ces points comme centres des cercles d'un même rayon très petit indéfiniment décroissant, qui entoureront des quantités de matière ayant entre elles des rapports limites quelconques, expressions mêmes de ces densités ρ. Il sera donc possible, sans sortir en quelque sorte du plan, de figurer par une pareille couche toute fonction $\rho = f(x, y)$ de deux variables. Et, sans quitter davantage un axe coordonné, celui des x par exemple, mais en y supposant étendu un filet de matière d'une largeur et d'une épaisseur insensibles, dont des longueurs égales très petites (tendant vers zéro) auraient entre elles des rapports limites, valeurs de leurs densités, exprimés par une fonction quelconque de x, l'on pourrait de même obtenir une sorte de représentation sensible de toute fonction $\rho = f(x)$ d'une variable.

Mais supposons que, outre les trois variables indépendantes x, y, z, on en introduise une quatrième, t. Alors on pourra encore, en faisant appel à la notion de la durée ou du temps, la plus claire peut-être que nous ayons après celle de l'espace, se représenter une fonction quelconque $\rho = f(x, y, z, t)$ de ces quatre variables. Il suffira d'imaginer d'abord que, ayant pris une unité de temps, l'on définisse ou caractérise chaque époque, c'est-à-dire chaque point de la durée, par sa distance à une époque déterminée très ancienne, ou, en d'autres termes, par le temps, généralement fort long, écoulé depuis cette époque fixe jusqu'à celle que l'on considère. Mais ensuite, pour ne pas avoir à opérer sur d'aussi grands nombres, qui pourraient dépasser toute limite, on procédera comme on l'a fait (p. 2) dans le cas des distances fixant la position d'un point sur une droite : on défalquera de tous ces nombres une partie commune, savoir l'intervalle compris depuis le commencement choisi d'abord, très reculé dans le passé, jusqu'à l'une des époques considérées prise pour *origine;* et l'on caractérisera ainsi chaque époque par sa distance à cette origine, distance positive ou négative suivant qu'elle devra, à partir de celle-ci, se compter en allant vers l'avenir ou en remontant dans le passé. Cet intervalle, positif ou négatif, qui sépare l'*origine* de l'époque considérée, est appelé simplement le *temps* et se représente d'ordinaire par la lettre t.

Cela posé, imaginons une matière qui, au lieu de conserver en chaque point (x, y, z) de l'espace la même *densité* aux divers instants successifs t, en changerait continuellement, soit parce qu'on se la figurerait partiellement produite ou anéantie sur place d'instant en instant, soit, plus simplement, parce qu'il y aurait des échanges de ma-

tière en quantité quelconque entre les régions de l'espace que l'on considère et d'autres très distantes dont on ne s'occupe pas. Il est clair que la densité ρ sera susceptible de recevoir, dans ces conditions, telles valeurs qu'on voudra, non seulement en fonction de x, y, z, mais encore en fonction de t, et que, par conséquent, la matière en question, plus ou moins massive en chaque endroit et à chaque intant, fournira une représentation naturelle de toute fonction $\rho = f(x, y, z, t)$ de quatre variables. On pourra, d'ailleurs, comme dans le cas précédent, se servir de cette représentation pour des fonctions d'un nombre moindre de variables : par exemple, un simple point, où l'on imagine de la matière condensée en quantité tantôt plus forte et tantôt plus faible, suffira pour exprimer une fonction $\rho = f(t)$ d'une variable.

Enfin, l'idée, non plus d'un changement d'état sur place, mais du *mouvement* proprement dit ou déplacement continu d'une figure à trois dimensions, supposée déformable, conduit à une manière simple de se représenter simultanément trois fonctions quelconques,

$$u = f_1(x, y, z, t), \qquad v = f_2(x, y, z, t), \qquad w = f_3(x, y, z, t),$$

de quatre variables indépendantes x, y, z, t, et cela sans faire intervenir aucune autre notion *extra-géométrique* que celle du temps. Imaginons cette figure composée d'une infinité de points mobiles qui, à un certain moment ou plutôt dans un certain état, soit réel, soit seulement fictif, auraient occupé les diverses positions (x, y, z) de l'espace : convenant alors de définir ou de distinguer désormais chacun d'eux par ses coordonnées x, y, z dans cet état spécial, supposons qu'ils se déplacent arbitrairement, sans qu'aucun cesse toutefois d'être entouré constamment par les mêmes. Si l'on appelle u, v, w soit les nouvelles coordonnées de l'un d'eux (x, y, z) à une époque quelconque t, soit seulement les accroissements totaux, positifs ou négatifs qu'elles ont éprouvés à partir des valeurs, dites *primitives*, x, y, z, il est clair que, dans les deux cas, u, v, w pourront être trois fonctions quelconques non seulement du temps t, mais aussi de ces coordonnées primitives x, y, z, qui changent avec le point considéré. Donc trois fonctions de quatre variables indépendantes expriment toujours un certain mouvement des différents points d'une figure déformable à trois dimensions.

Dans le cas où, les points de la figure se réduisant à un seul, on n'aurait pas à les distinguer les uns des autres, il ne resterait plus qu'une seule variable t, et, en appelant x, y, z, au lieu de u, v, w,

les coordonnées du mobile, on aurait trois relations de la forme

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

pour exprimer toutes les circonstances du mouvement, savoir, d'une part, la *trajectoire*, ou lieu des positions successives du mobile, d'autre part, la manière particulière dont cette courbe est parcourue. Ainsi, la description d'une courbe par un point mobile constitue une excellente représentation d'un système de trois fonctions quelconques d'une même variable indépendante. Ces fonctions se réduiraient d'ailleurs à deux, $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, si la courbe était contenue dans le plan des xy, et à une seule, $x = f_1(t)$, si le mobile se déplaçait simplement en suivant l'axe des x.

Supposons enfin que les points de la figure considérée forment une file et puissent, par conséquent, se distinguer les uns des autres au moyen d'une seule variable, α, qui sera par exemple leur distance à l'un d'eux, mesurée, le long de la file même, dans un certain état particulier (réel ou fictif) de celle-ci. Alors leurs coordonnées x, y, z à un instant quelconque seront fonction à la fois de t et de α; et l'on aura trois relations de la forme

$$x = f_1(t, \alpha), \quad y = f_2(t, \alpha), \quad z = f_3(t, \alpha),$$

pour exprimer soit, en y faisant varier t, la trajectoire de l'un quelconque des points de la file, soit, en y faisant varier α, le lieu de ces points à un moment donné t, c'est-à-dire la nouvelle forme prise par la file à ce moment. L'ensemble de toutes ces trajectoires et de toutes les files de points successivement dessinées par la file primitive constituera évidemment une sorte de réseau ou de tissu, infiniment mince mais ayant longueur et largeur, c'est-à-dire une surface. Et il est clair d'ailleurs qu'on peut, à l'inverse, sur toute surface, tracer deux systèmes de courbes, dont les unes soient les trajectoires d'une file de points qui coïnciderait successivement avec chacune des autres. Par conséquent, trois fonctions quelconques de deux variables indépendantes sont représentées simultanément au moyen d'une surface sillonnée d'une certaine manière par une file donnée de points.

Tels sont les principaux exemples de fonction, à la fois très généraux et très simples, que fournit la Géométrie en s'aidant au besoin des notions élémentaires de densité et de temps, et qui sont propres à devenir comme des types concrets ou palpables de toutes les fonctions d'un nombre pareil de variables.

8. — Classification des fonctions, au point de vue de leur calcul, en fonctions algébriques et transcendantes de diverses espèces.

Mais il ne suffit pas de savoir représenter graphiquement les fonctions; il importe aussi d'apprendre à calculer leurs valeurs, exactes ou approchées, au moyen d'opérations arithmétiques convenables effectuées sur les constantes de la question, qu'on doit supposer connues, et sur les variables indépendantes. A ce point de vue, si, d'une part, afin de simplifier, l'on ne fait varier à la fois qu'une variable, que, d'autre part, les calculs dont les données seraient uniquement les autres variables ou des constantes soient censés faits, de manière à ne regarder comme véritables constantes de la question que leurs résultats, la fonction proposée rentrera nécessairement dans l'une des trois catégories suivantes :

1° Ou bien cette fonction, que j'appellerai y, s'évaluera par un nombre limité d'opérations algébriques (additions, soustractions, multiplications, divisions et extractions de racines), comme il arrive quand elle est définie au moyen d'une équation algébrique, résoluble par une formule générale à la manière de celles du premier et du second degré, et ayant pour coefficients des polynômes affectés des puissances entières x, x^2, x^3, ... de la variable x;

2° Ou bien le calcul de la fonction y exigera une infinité de telles opérations, quoique cette fonction soit encore racine d'une équation algébrique ayant pour coefficients des polynômes en x, mais non résoluble par radicaux;

3° Ou bien enfin, non seulement le calcul de y ne pourra pas se faire au moyen d'un nombre fini d'opérations; mais, de plus, la fonction y ne sera même pas racine d'une équation algébrique ayant pour coefficients des polynômes en x.

Dans le premier cas, la fonction est dite *algébrique explicite* ou simplement *algébrique,* parce qu'elle se trouve exactement représentée au moyen d'une *expression algébrique,* c'est-à-dire d'un ensemble de lettres et de nombres désignant des quantités, reliés par les signes d'opérations $+$, $-$, $\sqrt{\ }$, etc. Une pareille fonction est qualifiée, en outre, de *rationnelle,* quand elle exprime la racine d'une équation du premier degré et qu'il n'y paraît, par conséquent, aucun radical ou exposant fractionnaire portant sur une expression où soit engagée la variable x. Elle est dite, au contraire, *irrationnelle,* quand il y figure des radicaux affectant la variable x. Lorsqu'elle est rationnelle, elle se ramène, en définitive, au quotient d'un polynôme par un polynôme; car des additions, des soustractions, des multiplications et

des divisions en nombre quelconque, effectuées sur des fractions algébriques, donnent pour résultat une nouvelle fraction. Ainsi, toute fonction algébrique rationnelle équivaut à une *fraction rationnelle*, de la forme

$$\frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots}{a'x^n + b'x^{n-1} + c'x^{n-2} + \dots}.$$

Enfin, si le dénominateur de cette fraction se réduit à une constante, par laquelle on pourra diviser tous les coefficients a, b, c, ... du numérateur, la fonction devient un simple polynôme

$$Ax^m - Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots,$$

où ne figurent que des indications d'additions, de soustractions et de multiplications : elle est dite alors *entière*. On l'appelle même fonction *linéaire*, quand elle est seulement du premier degré, comme $y = Ax + B$, et représentée ainsi géométriquement par une *ligne* droite. Ce cas particulier éminemment simple, auquel on cherche à rapporter tous les autres, est évidemment caractérisé par ce fait qu'à des accroissements égaux de la variable il en correspond toujours d'égaux de la fonction et que, par conséquent, les accroissements de la fonction y sont proportionnels à ceux de la variable.

Dans le second cas général, où la fonction y se trouve racine d'une équation algébrique non résolue ou même non résoluble par radicaux, la fonction est dite *algébrique implicite*. On la qualifie ainsi d'*algébrique*, bien qu'aucune expression algébrique finie ne puisse représenter l'ensemble de ses valeurs, soit parce qu'elle jouit de propriétés très analogues à celles des fonctions algébriques explicites (le fait qu'une équation algébrique est ou non résoluble algébriquement n'influant pas sur les plus importantes de ces propriétés), soit aussi parce que la résolution des équations algébriques constitue en Algèbre comme une sixième et dernière opération, savoir l'opération algébrique par excellence, comprenant les cinq premières (empruntées à l'Arithmétique), et même toutes leurs combinaisons possibles, comme cas particuliers, mais ne pouvant en général s'y réduire. Il est, d'ailleurs, permis d'attribuer aux coefficients de l'équation qui définit la fonction y une forme entière et rationnelle en x, c'est-à-dire la forme de simples polynômes; car si ces coefficients contenaient ou des dénominateurs, ou des radicaux, ou même des fonctions algébriques implicites de x, on pourrait non seulement chasser les dénominateurs, mais aussi faire disparaître les radicaux et les fonctions implicites au moyen d'éliminations que l'Algèbre apprend à effectuer.

Enfin, dans le troisième cas, la fonction, qui ne se trouve ni calcu-

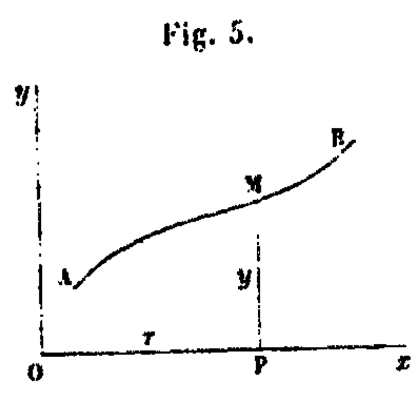
lable par un nombre fini d'opérations arithmétiques, ni même racine d'une équation algébrique à coefficients algébriques en x, est dite *transcendante*. Les moins compliquées de ces fonctions ont une origine algébrique. Ce sont, par exemple : 1° les irrationnelles à exposant incommensurable, comme $x^{\sqrt{2}}$, qui, comprises avec les fonctions algébriques monômes dans un même type, x^m, marquent, en quelque sorte, la transition des fonctions algébriques aux fonctions transcendantes; 2° les séries convergentes à termes algébriques, mais dont la somme ne peut être exprimée par un nombre fini de pareils termes; 3° enfin et surtout les fonctions *exponentielles* e^x, a^x, dont il sera question bientôt, et leurs inverses, les fonctions *logarithmes*, qu'on écrira, par exemple, $\log x$. D'autres ont une origine géométrique. Les plus simples de celles-là se présentent dans le cercle et s'appellent fonctions *circulaires* ou *angulaires*. Ce sont les *sinus, cosinus, tangente* et *cotangente* qu'a fait connaître la Trigonométrie, ainsi que leurs inverses *arc sinus, arc cosinus, arc tangente* et *arc cotangente*. Elles seront prochainement, dans ce Cours, l'objet d'une étude complémentaire.

Mais la plupart des fonctions transcendantes ont une origine encore plus complexe. On peut compter parmi celles-là presque toutes les fonctions représentant les phénomènes naturels : comme leur connaissance nous vient par l'expérience de quelques-uns de ces phénomènes, ou plutôt à l'occasion d'observations moins primitives et moins oubliées que celles qui nous ont suggéré les idées géométriques ou analytiques fondamentales, on les appelle *fonctions empiriques*. Les géomètres réussissent souvent à les exprimer avec toute l'approximation désirable, du moins entre des limites suffisamment étroites, soit au moyen de fonctions algébriques que l'on calcule ensuite directement, soit au moyen de fonctions exponentielles et circulaires qui s'évaluent en recourant aux Tables ordinaires de logarithmes, soit même quelquefois au moyen de fonctions encore moins simples, pour lesquelles on possède ou l'on construit préalablement des Tables analogues à celles de logarithmes. Les fonctions transcendantes considérées deviennent ainsi, d'ordinaire, des séries et, généralement, des limites d'expressions d'une nature plus élémentaire, algébriques ou même transcendantes. En tout cas, leur calcul exact demanderait une infinité d'opérations arithmétiques : ce qui n'a rien d'étonnant, puisque déjà, avec des nombres entiers pour données, une extraction de racine, ou même une division à effectuer en décimales, ne se terminent généralement pas.

Pour nous faire une idée juste de l'infinie variété des fonctions

transcendantes, imaginons que l'on décrive au hasard d'un mouvement continu, dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy, une courbe AMB. Une fois construite, elle détermine, par ses ordonnées $PM = y$ correspondant aux diverses abscisses $OP = x$, une certaine fonction y, parfaitement définie, de la variable x. Et il est clair pourtant que cette fonction n'obéit dans sa génération, lors de la description de la courbe, à aucune loi algébrique ou même géométrique qui suffise pour l'exprimer : elle est donc, non seulement transcendante, mais même irréductible à toute autre.

Fig. 5.



Par analogie avec les fonctions algébriques et transcendantes, lorsqu'un nombre incommensurable est racine d'une équation algébrique à coefficients commensurables, sa valeur est dite une *irrationnelle algébrique* (*explicite* ou *implicite* suivant qu'elle peut, ou non, s'exprimer par radicaux); dans le cas contraire, qui se présente notamment pour le rapport π de la circonférence au diamètre et pour la base $e = \lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ des logarithmes népériens, le nombre est qualifié de *transcendant*.

DEUXIÈME LEÇON.

VARIATION GRADUELLE DES FONCTIONS. — ÉTUDE DE CETTE VARIATION DANS LES FONCTIONS LES PLUS USUELLES : FONCTIONS ALGÉBRIQUES, SÉRIES, ARCS DE COURBE, ETC.

---

9. — Variation graduelle des fonctions; de la dérivée, pente ou fluxion qui l'exprime.

Une propriété générale et naturelle des choses dont la grandeur varie est leur *continuité* ou, plus explicitement, leur *continuité relative* (c'est-à-dire proportionnée à cette grandeur même) : elle consiste en ce que, si l'une quelconque des variables dont dépendent ces choses vient à changer, mais d'une fraction suffisamment petite de l'intervalle fini où on doit la considérer, elles ne changeront elles-mêmes que d'une fraction aussi faible que l'on voudra de leurs valeurs ordinaires ou moyennes. C'est tout au plus pour certaines valeurs isolées des variables, valeurs clairement indiquées d'avance par la nature même des choses en question, qu'il peut en être autrement et qu'il y a, comme on dit, *discontinuité* ou brusque variation de celles-ci. Or de là découlent deux caractères importants des fonctions algébriques, et même de toutes les fonctions transcendantes exprimant des phénomènes naturels qui nous aient été jusqu'ici accessibles.

Le premier consiste en ce que les fonctions sont *continues*, c'est-à-dire telles, que, si l'on fait croître leurs variables par différences assez faibles, elles éprouveront elles-mêmes des accroissements (positifs ou négatifs) inférieurs à une fraction quelconque assignée de leurs valeurs (finies) et, par conséquent, à toute quantité fixe autre que zéro déterminée à l'avance, si petite qu'elle soit. C'est ce qu'on appelle simplement la *continuité* des fonctions, mais qu'on pourrait appeler aussi leur *continuité absolue*, pour indiquer que les changements y sont dits *petits* à raison de leurs valeurs absolues, sans qu'on ait à s'y préoccuper de leurs rapports aux fonctions elles-mêmes, à la grandeur desquelles l'unité de mesure choisie est justement proportionnée.

Le second caractère consiste en ce que les fonctions dont il s'agit varient *graduellement*, c'est-à-dire presque uniformément pour de

accroissements très faibles des variables, ou par degrés successifs d'autant moins inégaux (comparés chacun au suivant) qu'on les prend plus petits. En d'autres termes, si l'on donne à la variable x un nombre quelconque n d'accroissements successifs égaux h, ne formant qu'un certain total $H = nh$ assez faible, deux consécutifs des accroissements partiels correspondants k (positifs ou négatifs) de la fonction $y = f(x)$, auront entre eux un rapport presque égal à l'unité, et tendant vers l'unité à mesure que n grandira ou que h y deviendra de plus en plus faible. La raison en est que, avec un accroissement h de la variable très petit, et constamment le même quelle que soit la valeur de x d'où l'on part, l'accroissement simultané

$$k = f(x+h) - f(x)$$

de y constitue une nouvelle fonction de x, mais une fonction dont les valeurs sont extrêmement faibles et en rapport avec h lui-même : or, comme évidemment, quelque minime que soit h, cette petite fonction est à considérer dans le même intervalle total que la proposée $f(x)$, le principe de la continuité *relative* des choses, supposé la régir, l'astreint à ne changer que d'une *fraction insensible* de *sa* valeur dans toute fraction insensible aussi de cet intervalle total. Donc les n valeurs successives de k que comprendra l'intervalle partiel H auront toutes entre elles un rapport presque égal à 1, mais surtout deux consécutives lorsque, n devenant très grand, leur intervalle h deviendra une partie de l'intervalle total incomparablement plus petite encore que n'était H.

Cela posé, choisissons une valeur de x correspondant au milieu environ de l'intervalle considéré H, ou, plutôt, marquons un intervalle $\frac{1}{2}$H de part et d'autre d'une valeur donnée quelconque de x, et appelons : 1° Δx tout accroissement, positif ou négatif, inférieur à $\frac{1}{2}$H (en grandeur absolue), reçu par x à partir de cette valeur fixe; 2° Δy l'accroissement simultané de y. Si l'on prend extrêmement grand le nombre n des intervalles partiels h en lesquels on divise l'intervalle H, l'accroissement Δx pourra être mesuré avec une approximation indéfinie en adoptant h pour unité, et contiendra cette mesure un certain nombre entier m de fois (positif ou négatif, suivant le sens où on la porte), avec un reste négligeable. Quant à Δy, il se composera, sauf un reste analogue, de m accroissements presque égaux au premier d'entre eux k ou $f(x+h) - f(x)$. En prenant n suffisamment grand, on aura donc, avec une erreur relative d'autant plus faible que Δx sera lui-même plus voisin de zéro, $\Delta y = mk$ ou $\Delta y = \frac{k}{h}\Delta x$.

vu que m exprimera le quotient très élevé $\frac{\Delta x}{h}$. Ainsi, *la propriété de graduelle variation revient à dire que des accroissements suffisamment petits Δy d'une fonction sont sensiblement proportionnels à ceux Δx de la variable,* ou que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de pareils accroissements *simultanés* ne varie *plus* d'une manière appréciable, *si petit* qu'y devienne Δx.

Autrement dit, le rapport

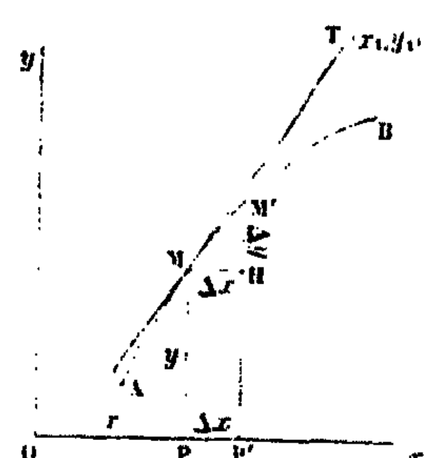
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, tend vers une limite déterminée quand ce dernier s'évanouit. Cette limite, d'où Δx a disparu, mais qui dépend encore de x, est évidemment une nouvelle fonction de x, à laquelle la loi de la continuité relative des choses s'appliquera comme à $f(x)$. On l'appelle la *dérivée* de $f(x)$. Newton la désignait par la même lettre que la fonction proposée ellemême, mais surmontée d'un point. Lagrange a remplacé le point par un accent qu'on met à la suite. Par exemple, la dérivée de y ou de $f(x)$ s'écrira soit y', soit $f'(x)$.

La *dérivée* y' peut recevoir d'autres noms, suivant le mode de représentation qu'on adopte pour la fonction.

Si celle-ci, $y = f(x)$, est figurée par une courbe, AB, rapportée à un axe horizontal Ox des abscisses et à un axe vertical Oy des ordonnées, les accroissements, Δx et Δy, éprouvés par les coordonnées x et y quand on passe d'un point M à un point voisin M', se construisent en menant les deux ordonnées correspondantes MP, M'P', et en les coupant par l'horizontale MH, de manière à obtenir l'accroissement HM' de l'altitude y entre les deux points M et M'. La projection horizontale PP' ou MH de la corde MM' qui les joint exprime évidemment Δx, et l'élévation HM' (positive ou négative) de M' au-dessus de M exprime Δy. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ n'est donc autre que $\frac{\text{HM}'}{\text{MH}}$ ou, justement, ce qu'on appelle la *pente* de la corde MM'. Il fixe la direction de cette corde; car il égale, dans le triangle rectangle MHM', la tangente trigonométrique de l'angle HMM' qu'elle fait avec l'horizon-

Fig. 6.



tale MH ou avec l'axe parallèle Ox des abscisses. Dire que ce rapport ne varie plus sensiblement lorsque Δx, déjà suffisamment petit, tend vers zéro, ou lorsque le point M' se rapproche de M, c'est donc dire que toutes les très petites cordes émanées de M ont presque la même direction ou que, prolongées indéfiniment, elles tendent vers une certaine droite limite, vers une *tangente*, à mesure que leur second point d'intersection M' avec la courbe se rapproche du premier M.

Ainsi, la propriété, que possèdent les courbes, d'avoir en chacun de leurs points une *tangente*, ou une direction déterminée, n'est pas autre chose qu'une forme géométrique du principe de la graduelle variation des fonctions et, par suite, de celui de la *continuité relative* des choses.

Comme tous les rapports, $\frac{k}{h}$, d'accroissements partiels simultanés k et h compris dans Δy et dans Δx (mais d'ailleurs quelconques), diffèrent de moins en moins de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ à mesure que Δx se rapproche de zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend à devenir, à la limite, la pente non seulement d'une corde, mais de *tout* son arc, qui, ainsi, au moment de s'annuler, est infiniment près d'affecter dans ses diverses parties, aussi nombreuses encore, que l'on voudra, une direction *unique* parfaitement déterminée; et, quoique corde et arc se réduisent enfin au seul point M, néanmoins, en vertu du principe de continuité énoncé vers la fin du n° 3 (p. 5), il subsiste alors d'eux *cette direction*, qu'ils impriment, en disparaissant, à la tangente MT. Aussi dit-on indifféremment que la dérivée y' est la *pente* soit de la tangente MT, soit de la courbe au point M; et l'on peut, par extension, appeler *pente d'une fonction* sa dérivée.

Quand l'axe Oy devient oblique sur Ox, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et sa limite y' cessent d'être, pour la corde MM' ou pour la tangente MT, ce qu'on appelle la *pente*; mais ils continuent à en être le *coefficient angulaire*, rapport constant des deux accroissements variables qu'éprouvent le long de la droite considérée, à partir d'un point, $M(x, y)$ par exemple, de celle-ci, l'ordonnée et l'abscisse. Si donc x_1 et y_1 désignent les coordonnées *courantes* de la tangente, c'est-à-dire celles d'un point quelconque T qui s'y trouve situé, il viendra toujours, pour l'équation de cette droite,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = y' \quad \text{ou} \quad y_1 - y = y'(x_1 - x).$$

Passons maintenant à un autre mode de représentation de la fonction donnée, et supposons que celle-ci, désignée par $\rho = f(t)$, mesure aux diverses époques t une quantité de matière variable, accumulée dans une région donnée de l'espace. Alors son accroissement $\Delta\rho$ (positif ou négatif), simultané à un très petit accroissement positif Δt de la variable, exprime la quantité de matière qui a, durant cet instant Δt, *afflué* du dehors dans la région dont il s'agit; et le rapport $\frac{\Delta\rho}{\Delta t}$, constant quand on suppose cette affluence pareille pour des temps égaux ou proportionnelle au temps, est ce que deviendrait, dans cette hypothèse simple d'une *affluence uniforme*, l'accroissement $\Delta\rho$ de la quantité de matière, si l'on prenait $\Delta t = 1$, c'est-à-dire au bout d'un temps égal à l'unité choisie de durée. Or, à cause même de l'existence de la dérivée $\rho' = f'(t)$, l'uniformité tend, en effet, à se réaliser, pendant tous les petits temps successifs en nombre m quelconque contenus dans Δt, lorsque Δt s'approche indéfiniment de zéro. Donc la dérivée $f'(t)$, limite du rapport $\frac{\Delta\rho}{\Delta t}$, représente, pour l'époque précise t, l'*afflux* de matière *rapporté à l'unité de temps*. Aussi, à ce point de vue, peut-elle s'appeler simplement le *flux* ou, comme disait Newton, la *fluxion* de la fonction ρ; et Newton qualifiait celle-ci, par opposition, de *quantité fluente*, c'est-à-dire s'écoulant ou variable.

La fluxion est ainsi l'expression d'un changement effectué sur place, ou plutôt de la *rapidité* de ce changement à un moment donné. Mais elle devient celle d'un changement de place ou mouvement proprement dit, quand la fonction, que j'écrirai $x = f(t)$, est une coordonnée x d'un point mobile. Alors la dérivée $f'(t)$ représente l'accroissement qu'éprouverait la coordonnée en question dans l'unité de temps, ou le chemin qui s'y trouverait parcouru suivant le sens de l'axe coordonné correspondant, si le mobile continuait à se mouvoir, pendant toute cette unité de temps, comme il le fait au moment que l'on considère. Elle prend le nom de *vitesse* et devient évidemment l'expression, la mesure même du mouvement. C'est, à proprement parler, cette vitesse que Newton appelait *fluxion* : dans un écoulement de liquide (qu'on pourrait prendre comme image du mouvement), elle représente à chaque instant, au moins proportionnellement, le *flux* ou le *débit*, volume fluide (rapporté à l'unité de temps) qui passe alors par un endroit donné, et son nom de fluxion se trouve ainsi parfaitement justifié.

10. — Expression, par la dérivée, d'un rapport d'accroissements finis; invariabilité de la fonction quand la dérivée s'annule; théorème de Rolle.

De ce qui précède, il résulte évidemment que deux accroissements finis (et non plus insensibles), Δx et Δy, de la variable x et de sa fonction continue $y = f(x)$, résultent toujours, quelle que soit leur grandeur, de l'addition d'accroissements successifs très petits, positifs ou négatifs, $h_1, h_2, \ldots, h_m$ pour la variable et $k_1, k_2, \ldots, k_m$ pour la fonction, dont les rapports respectifs $\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \ldots, \frac{k_m}{h_m}$ tendent, à mesure que le nombre m augmente et que chaque accroissement diminue, vers les diverses valeurs de la dérivée $f'(x)$ correspondant aux valeurs de la variable intermédiaires entre les deux, x et $x + \Delta x$, que l'on considère. De plus, les dénominateurs $h_1, h_2, \ldots, h_m$ peuvent être supposés tous de même signe, puisque rien n'empêche même de les prendre égaux. Or le théorème relatif à l'addition terme à terme de rapports inégaux (p. 12), déjà appliqué plusieurs fois, montre que, si l'on forme les deux sommes $\Delta y = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ et $\Delta x = h_1 + h_2 + \ldots + h_m$, indépendantes de m, le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sera compris entre le plus petit et le plus grand des rapports $\frac{k_1}{h_1}, \frac{k_2}{h_2}, \ldots, \frac{k_m}{h_m}$ et, par suite, entre leurs valeurs limites qui sont la plus petite et la plus grande que reçoive la dérivée f' quand sa variable va de x à $x + \Delta x$. Ainsi, *le rapport de tout accroissement d'une fonction continue, à l'accroissement simultané de sa variable, se trouve compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs de la dérivée dans l'intervalle même que représente cet accroissement de la variable.*

On déduit immédiatement de ce principe : 1° que, *si, dans un certain intervalle, la dérivée f' est positive* (*tout en pouvant s'annuler pour des valeurs isolées de la variable*), les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ seront positifs ou que, en d'autres termes, *la fonction y variera dans le même sens que sa variable,* croissant quand elle croîtra, décroissant quand elle décroîtra ; 2° que *si, dans un certain intervalle, la dérivée est négative* (*tout en pouvant encore avoir de distance en distance des valeurs nulles*), *la fonction y variera en sens inverse de sa variable,* décroissant quand elle croîtra, croissant quand elle décroîtra ; 3° enfin, que *si, dans un certain intervalle, la dérivée s'annule constamment,*

les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ s'y annuleront de même, ou que *la fonction y sera constante*. Réciproquement, dans tout intervalle où la fonction varie suivant le même sens que sa variable, la dérivée, évidemment incapable d'y devenir négative (comme limite de rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positifs), ne peut même nulle part s'annuler d'une manière continue, sans quoi y cesserait d'y varier, et elle est positive ou ne s'annule qu'accidentellement. De même, dans tout intervalle où la fonction varie en sens inverse de sa variable, la dérivée est évidemment négative, tout en pouvant s'annuler pour des valeurs isolées de sa variable. Et quant aux endroits où la fonction resterait constante, la dérivée y serait nulle d'une manière continue, vu qu'on y aurait constamment $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ et, par suite, limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Ainsi, *une corrélation parfaite existe entre le mode de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée*.

Il suit encore de là que *deux fonctions u, v, dont les dérivées u', v' sont égales pour toutes les valeurs de la variable x, ne peuvent différer que par une constante*. En effet, leur différence $u - v$ varie évidemment, quand x reçoit un certain accroissement Δx, de l'excédent $\Delta u - \Delta v$ de l'accroissement correspondant de u sur celui de v; de sorte que la dérivée de $u - v$ est la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$, ou égale, par conséquent, la quantité $u' - v'$, constamment nulle quand les dérivées u' et v' des deux fonctions proposées ont les mêmes valeurs. Ainsi, la différence $u - v$ se réduit bien à une constante.

Sous une forme plus géométrique ou plus concrète, cette proposition revient à dire que *les ordonnées $u = f(x)$ d'une courbe sont déterminées, dès qu'on donne ses pentes successives $f'(x)$ en fonction des abscisses x et, en outre, l'ordonnée particulière correspondant à une seule abscisse, dite initiale*, que j'appellerai x_0. Car, si $v = F(x)$ est l'ordonnée de toute courbe ayant ses pentes $F'(x)$ égales aux pentes données $f'(x)$ de la proposée, les deux fonctions u, v, à dérivées constamment égales, garderont sans cesse entre elles leur différence primitive, nulle par hypothèse quand la valeur correspondante $F(x_0)$ de v doit être précisément celle, $f(x_0)$, de u. Donc on aura bien, quel que soit x, $v = u$, et une seule courbe sera possible.

Mais revenons au rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ des accroissements simultanés éprouvés par une fonction $y = f(x)$ et par sa variable x lorsque celle-ci passe de la valeur x à la valeur $x + \Delta x$, rapport compris entre la plus

petite et la plus grande des valeurs que reçoit dans l'intervalle la dérivée y'. D'ordinaire, cette dérivée y' est continue; ce qui signifie qu'elle ne va de sa plus petite à sa plus grande valeur, ou *vice versa*, que par des variations insensibles et, conséquemment, en prenant toutes les valeurs intermédiaires, y compris celle qui égale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Si donc on appelle $\theta \Delta x$ une fraction convenablement choisie de Δx, ou θ un certain nombre compris entre zéro et 1 (en sorte que $x + \theta \Delta x$ puisse représenter suivant les cas toutes les valeurs intermédiaires entre x et $x + \Delta x$), la valeur de x qui rend la dérivée égale au rapport considéré $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pourra s'écrire $x + \theta\Delta x$; et l'on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x + \theta \Delta x) \quad \text{ou} \quad \Delta y = f'(x + \theta \Delta x)\,\Delta x.$$

Cette formule permet de démontrer une importante proposition, qui s'énonce ainsi : *Lorsqu'une fonction, continue dans un certain intervalle ainsi que sa dérivée, y passe deux fois par une même valeur, il existe, entre les deux valeurs correspondantes de la variable, une troisième valeur annulant la dérivée.* On peut appeler, en effet, x, $x + \Delta x$ les deux valeurs de la variable pour lesquelles la fonction atteint la grandeur considérée, et, en faisant alors $\Delta y = 0$, la formule donne bien $f'(x + \theta \Delta x) = 0$.

Si la dérivée $f'(x)$ n'était pas continue, le théorème d'où l'on a déduit cette formule montrerait seulement que la plus petite et la plus grande des valeurs de $f'(x)$ comprendraient entre elles le rapport nul $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, et que, par conséquent, cette dérivée changerait de signe pour une certaine valeur (de la variable) intermédiaire entre x et $x + \Delta x$.

Quand une équation est de la forme $f(x) = 0$, avec un premier membre $f(x)$ fonction continue, ainsi que sa dérivée $f'(x)$, pour toutes les valeurs finies de x, deux quelconques des valeurs de x qui font acquérir à $f(x)$ la valeur zéro en comprennent donc au moins une annulant $f'(x)$. Ainsi, *entre deux racines consécutives de l'équation proposée* $f(x) = 0$ *il en existe au moins une de l'équation dérivée* $f'(x) = 0$, et, par suite, *entre deux racines consécutives de l'équation dérivée* $f'(x) = 0$ *il ne peut en exister plus d'une de l'équation proposée* $f(x) = 0$. C'est le théorème de Rolle, qui permet, si l'on sait résoudre l'*équation dérivée* $f'(x) = 0$, de *séparer* les racines de $f(x) = 0$, puisque celles mêmes de $f'(x) = 0$, rangées par ordre de grandeur entre $-\infty$ et $+\infty$, constitueront avec ces valeurs extrêmes

$-\infty$ et $+\infty$ une série de limites dans chaque intervalle desquelles il existera au plus une racine de $f(x)=0$.

Revenons encore à la formule $\Delta y = f'(x+\theta\,\Delta x)\,\Delta x$. Lorsque Δx y tend vers zéro, $f'(x+\theta\,\Delta x)$ tend vers $f'(x)$, et, en appelant ε la quantité *évanouissante* $f'(x+\theta\,\Delta x)-f'(x)$, il vient

$$\Delta y = [f'(x)+\varepsilon]\,\Delta x,$$

relation importante, que nous aurons à considérer plus loin.

11. — Dérivées des fonctions élémentaires de l'analyse et de leurs combinaisons les plus simples : somme ou différence, produit, quotient. Discontinuité d'un quotient qui passe par l'infini.

Résumons ici les démonstrations d'un Cours antérieur, qui prouvent directement l'existence de la dérivée dans toutes les fonctions élémentaires de l'analyse, tant algébriques que transcendantes, et dans leurs combinaisons les plus simples.

Et d'abord, si l'on considère une somme ou une différence, comme $u+v-w$, de fonctions u, v, w dépendant d'une certaine variable x, il est clair que son accroissement correspondant à un accroissement Δx de cette variable sera la somme ou la différence des accroissements simultanés Δu, Δv, Δw de ces fonctions. Par suite, en divisant, par exemple, $\Delta u+\Delta v-\Delta w$ par Δx et en faisant tendre ensuite Δx vers zéro, on verra que *la dérivée d'une somme ou d'une différence est la somme ou la différence des dérivées de tous les termes entrant dans son expression.* Si quelqu'un des termes était constant, c'est-à-dire indépendant de la variable considérée x, sa variation et, par conséquent, sa dérivée seraient nulles. Mais si l'un d'eux se réduisait à cette variable x, sa dérivée, quotient limite de Δx par Δx, vaudrait évidemment 1.

Le cas où il s'agit d'une somme $u+u+u+\dots$ d'un certain nombre a de termes égaux conduit à celui d'un produit de la forme au, ayant un facteur constant. Il est clair que la dérivée $u'+u'+u'+\dots$ est alors au', même quand a se trouve ensuite divisé par un nombre entier soit positif, soit négatif, ou devient une fraction et, comme cas limite, une quantité constante quelconque; car, d'après la définition même du produit au, ce produit, ses accroissements et sa dérivée se trouveront divisés par le même nombre. Ainsi, *la dérivée du produit d'un facteur constant par un facteur variable est le produit du facteur constant par la dérivée du facteur variable.*

Passons maintenant à un produit $y=uv$ de deux facteurs u, v va-

riables tous les deux. Si l'on fait croître x de Δx, u croît de Δu, v de Δv, y de Δy, et l'on a

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v;$$

d'où, en divisant par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta v.$$

Enfin, faisons tendre Δx vers zéro, et passons à la limite en observant que $\frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta v$ y devient $u'\,\Delta v$ ou zéro. Nous aurons simplement $y' = vu' + uv'$ et, en divisant par $y = uv$,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}.$$

Ainsi, *la dérivée d'un produit divisée par ce produit est la somme des dérivées de ses facteurs divisées de même par ces facteurs respectifs.* Or il est clair qu'une pareille loi est générale ou s'étend au cas d'un nombre quelconque de facteurs; car, si l'on décompose l'un des deux considérés d'abord, v par exemple, en deux nouveaux facteurs w, w_1, la même démonstration permettra de remplacer $\frac{v'}{v}$ par $\frac{w'}{w} + \frac{w'_1}{w_1}$; et ainsi de suite quand on opérera de nouveaux dédoublements d'un facteur en deux autres.

Donc, en général, si $y = uvw\ldots$, on aura

$$(1) \qquad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots.$$

En multipliant les deux membres par $y = uvw\ldots$, on verra que *la dérivée d'un produit est la somme des produits qu'on obtient en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres.*

Si la fonction donnée y est le quotient, $y = \frac{u}{v}$, de deux fonctions u et v de x, u sera le produit de v par y et la formule (1) donnera

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} + \frac{y'}{y},$$

ou bien, en transposant et multipliant finalement par $y = \frac{u}{v}$,

$$(2) \qquad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} = \frac{vu' - uv'}{uv}, \qquad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

La dérivée d'un quotient égale donc le rapport, au carré du diviseur, de l'excédent du produit du diviseur par la dérivée du dividende sur le produit du dividende par la dérivée du diviseur.

Le quotient $\frac{u}{v}$, où j'admettrai que u et v soient deux fonctions finies et continues pour toutes les valeurs finies de la variable x, présente souvent une particularité remarquable, due à ce que la division devient une opération *illusoire*, c'est-à-dire ne donnant plus de résultats précis, lorsque son diviseur est zéro. Si, en effet, x reçoit une valeur, a, annulant v, le quotient $\frac{u}{v}$ sera *par lui-même*, comme on sait, ou indéterminé ou dépouvu de sens, suivant que u, en même temps, s'annulera ou ne s'annulera pas. Mais cette valeur de x ne doit pas être considérée seule, puisque x est une variable; et le principe d'unité ou d'ordre, déjà appliqué à plusieurs reprises, dont il a été parlé vers la fin du nº 3 (p. 5), oblige de supposer continue une fonction toutes les fois qu'on est indécis sur sa valeur. On ne devra, par conséquent, attribuer au quotient $\frac{u}{v}$, pour $x = a$, que des valeurs *faisant suite* à celles qu'il reçoit quand x diffère de moins en moins de a. On verra plus loin que ce principe lève, la plupart du temps, la difficulté, ou détermine tout à fait la fonction, dans le cas où u s'annule en même temps que v. Mais, dans le cas contraire où u diffère de zéro pour $x = a$, il est clair que la fonction grandit indéfiniment (en valeur absolue) à mesure que son dénominateur approche de zéro; de sorte qu'on est conduit à lui attribuer, pour $x = a$, soit une valeur *infinie*, si v s'annule sans changer de signe ou que toutes les valeurs très grandes considérées du quotient aient le même signe, soit même deux valeurs infinies, l'une positive et l'autre négative, si, comme il arrive d'ordinaire, v change de signe en s'annulant, et qu'il y ait ainsi lieu de faire suite (autant que possible), pour $x = a$, à des valeurs de signes contraires se rapportant, les unes, aux valeurs de x inférieures à a, les autres, aux valeurs de x plus grandes que a. On dit, dans ce dernier cas, que la fonction passe *brusquement*, pour $x = a$, de $-\infty$ à $+\infty$ ou de $+\infty$ à $-\infty$, suivant que ses valeurs pour x moindre que a sont négatives ou positives. Mais, qu'elle change ou non de signe, elle y *passe par l'infini*, ce qui suffit pour la rendre discontinue à l'instant où $x = a$. En effet, si peu qu'on fasse varier x à partir de la valeur a, ce n'est pas un changement très petit qu'éprouve en même temps le quotient $\frac{u}{v}$, comme il le faudrait pour la continuité, mais un changement infini ou dépassant toute limite. Et la dérivée de $\frac{u}{v}$ devient

infinie en même temps que $\frac{u}{v}$; car, dans le voisinage, là où les variations de la fonction sont déjà hors de toute proportion avec celles de la variable, cette dérivée ne peut manquer d'être extrêmement grande (en valeur absolue), et d'autant plus qu'on est plus près de la valeur *critique* $x = a$.

12. — Suite : dérivée d'une puissance. — Démonstration de l'existence du nombre e.

Si, dans un produit $y = uvw\ldots$ de n facteurs $u, v, w, \ldots$, ceux-ci deviennent égaux, ou que l'on ait $y = u^n$, la formule (1) se réduit à $\frac{y'}{y} = \frac{nu'}{u}$. Or la même relation simple continue à avoir lieu quand n est un nombre entier négatif $(-m)$, cas où, par définition, u^n exprime le quotient $\frac{1}{u^m}$: en effet, la première formule (2), en remplaçant dans son second membre u par 1, v par u^m et, par suite, respectivement, $\frac{u'}{u}$ par zéro, $\frac{v'}{v}$ par $\frac{mu'}{u}$, donne bien $\frac{y'}{y} = \frac{-mu'}{u} = \frac{nu'}{u}$. Et elle s'étend également au cas de n égal à une fraction quelconque $\frac{p}{q}$ (où l'on peut toujours supposer le dénominateur q positif), cas où, par définition, $y = u^n$ n'est pas autre chose que la racine $\sqrt[q]{u^p}$, supposée réelle, mais prise avec l'un quelconque des signes qu'elle pourrait comporter. Alors les deux expressions y^q, u^p, à exposants entiers, représentent identiquement la même fonction, dont la dérivée divisée par cette fonction elle-même vaudra, par suite, à volonté, soit $\frac{qy'}{y}$, soit $\frac{pu'}{u}$. Il vient donc encore $\frac{y'}{y} = \frac{p}{q}\frac{u'}{u} = \frac{nu'}{u}$. Ainsi, quel que soit l'exposant n, positif ou négatif, entier ou fractionnaire et même (par raison de continuité) incommensurable, le rapport de la dérivée de u^n à cette fonction u^n elle-même a pour valeur $\frac{nu'}{u}$. On en déduit que *la dérivée d'une puissance quelconque, u^n, de toute fonction u, s'obtient en diminuant algébriquement l'exposant d'une unité, puis en multipliant le résultat par l'exposant primitif et par la dérivée de la fonction u.*

Supposons, par exemple, qu'on ait $n = \frac{1}{2}$ ou qu'il s'agisse d'obtenir la dérivée de $\sqrt{u}$: il viendra $\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u'$, c'est-à-dire $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Ainsi, *la*

dérivée d'un radical carré est le quotient de la dérivée de la quantité sous le radical par le double du radical.

Dans le cas particulier où la fonction u n'est pas autre chose que la variable même x et où l'on a, de la sorte, $\Delta u = \Delta x$, $\frac{\Delta u}{\Delta x} = 1$, $u' = 1$, il vient, comme dérivée de x^n, $y' = n x^{n-1}$. Cette expression se réduit sensiblement à $y' = n$ lorsque x^{n-1} diffère très peu de l'unité : ce qui arrive toujours quand x en diffère lui-même suffisamment peu. Par conséquent, si x éprouve, à partir d'une première valeur $x = 1$, un accroissement H assez faible pour que, dans tout cet intervalle H, l'écart de x^{n-1} d'avec l'unité reste une très petite fraction de celle-ci, on aura, d'après une formule précédente (p. 35), où il faudra poser $\Delta x = H$ et $\Delta y = (1 + H)^n - 1$,

$$(1 + H)^n - 1 = n H (1 + \varepsilon),$$

$1 + \varepsilon$ exprimant un nombre, très peu différent de 1, compris entre les deux valeurs extrêmes 1 et $(1 + H)^{n-1}$ de x^{n-1}. Or $(1 + H)^{n-1}$, quotient de $(1 + H)^n$ par $1 + H$, s'écartera peu de l'unité, et il en sera, par suite, de même du rapport $1 + \varepsilon$ des deux expressions $(1 + H)^n - 1$, nH, si $(1 + H)^n$ diffère peu de 1 en même temps que $1 + H$. Mais, pour de petites valeurs successives de H s'éloignant de plus en plus de zéro, les deux fonctions $(1 + H)^n - 1$, nH s'en éloignent toutes les deux de plus en plus, et, dans ces conditions de petitesse de H, leur quasi-égalité relative, même en cessant d'être fort approchée si $(1 + H)^n$ commence à différer sensiblement de 1, ne permet pas à la première, $(1 + H)^n - 1$, de s'y écarter d'une manière un peu notable de zéro sans que la seconde, nH, en fasse autant ; de sorte que, pour les faibles valeurs considérées de H, ces deux fonctions restent, ou non, fort voisines de zéro toutes les deux à la fois. Ainsi, dire que $1 + H$ et $(1 + H)^n$ diffèrent peu de 1 équivaut à dire que H et nH sont très petits par rapport à l'unité ; et la formule ci-dessus peut s'écrire encore

$$(3) \qquad (\text{pour H et } nH \text{ très petits}) \qquad (1 + H)^n = 1 + nH(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro quand le plus grand (en valeur absolue) des deux nombres H, nH y tend lui-même.

Cette relation (3) mérite l'attention ; car, si l'exposant n y est une quantité continue, recevant par conséquent des valeurs incommensurables, le premier membre est transcendant, tandis que le second, où n se trouve devenu un coefficient, est algébrique, quand on le réduit, avec une approximation susceptible de grandir indéfiniment, à $1 + nH$. La formule établit donc comme un passage de l'algébrique au trans-

cendant, ou les relie l'un à l'autre, quoique ce passage ne soit, pour ainsi dire, qu'un simple point de contact, puisqu'il ne concerne que les puissances de nombres très voisins de 1 ayant elles-mêmes leurs valeurs très voisines de l'unité.

Aussi tirerons-nous un grand parti de la relation (3). Servons-nous-en ici, d'abord, pour prouver l'existence de ce qu'on appelle le nombre e, c'est-à-dire d'une limite de l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, dans laquelle m désigne une quantité qui grandit indéfiniment. Il faut, pour cela, montrer que, m étant déjà supposé suffisamment grand, le nombre $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, que j'appellerai E, diffère aussi peu que l'on veut de la nouvelle valeur, $E_1=\left(1+\frac{1}{km}\right)^{km}$, qu'il recevrait, si m prenait toute autre valeur absolue plus grande et devenait km, où k serait ainsi un facteur positif ou négatif supérieur à l'unité, mais d'ailleurs quelconque.

En effet, si, dans (3), on fait $H=\frac{1}{km}$ et $n=k$, le produit $nH=\frac{1}{m}$ sera fort petit, et cette formule (3) donnera

$$\left(1+\frac{1}{km}\right)^k=1+\frac{1+\varepsilon}{m};$$

d'où

$$\left(1+\frac{1}{km}\right)^{km} \quad \text{ou} \quad E_1=\left(1+\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon}{m}\right)^m,$$

et, en divisant par E, c'est-à-dire par $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, puis appelant ε_1 le quotient (sensiblement égal à ε) de ε par $1+\frac{1}{m}$,

$$\frac{E_1}{E}=\left(\frac{1+\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon}{m}}{1+\frac{1}{m}}\right)^m=\left(1+\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^m.$$

Appliquons enfin à l'expression $\left(1+\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^m$ la formule (3), en y posant $H=\frac{\varepsilon_1}{m}$, $n=m$; ce qui donnera comme résultat, à fort peu près, $1+\varepsilon_1$ ou, par suite, $1+\varepsilon$; et il viendra, très sensiblement,

$$\frac{E_1}{E}=1+\varepsilon, \qquad E_1-E=E\varepsilon.$$

Donc, quand la valeur absolue de m, supposée déjà assez grande,

croît jusqu'à l'infini, E ne varie plus que dans un rapport insignifiant et reste fini. Or imaginons que l'on recommence le raisonnement, mais en prenant m de plus en plus grand, afin que ε, qui tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$, décroisse indéfiniment. Puisque nous savons que E ne dépassera jamais une certaine grandeur, le produit $E\varepsilon$, expression des changements ultérieurs de E, tendra bien vers zéro; et, par suite, E ou $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ s'approchera bien de la limite qu'on désigne par la lettre e. Cette limite n'est évidemment pas moindre que 1, puisque, si m se trouve, par exemple, positif, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est constamment supérieur à l'unité.

De ce que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers la limite e, il suit, en élevant ce nombre e à une puissance quelconque, dont j'appellerai x l'exposant, que e^x est aussi une limite, savoir celle de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}$, ou de $\left(1+\frac{x}{mx}\right)^{mx}$. Or il suffit que x diffère de zéro pour que le produit mx reçoive successivement, à mesure que m grandit, toutes les valeurs absolues très grandes. Donc mx est, comme m, un nombre positif ou négatif indéfiniment grandissant, et peut s'appeler également m. On a ainsi la formule

$$(4) \qquad e^x = \text{limite de } \left(1+\frac{x}{m}\right)^m \text{ quand } m \text{ est très grand.}$$

Elle établit, pour toutes les valeurs finies de la puissance e^x, du moins en y faisant m commensurable, cette réduction approchée du transcendant à l'algébrique qu'opérait la formule (3) dans le cas de puissances très voisines de 1.

Et cela résulte au fond, comme on voit, de la même formule (3), qui nous a permis de démontrer la quasi-invariabilité de l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}$ quand m y varie sans cesser d'être très grand; de manière à nous donner le droit de maintenir constant et commensurable, quelque valeur que x reçoive, l'exposant mx, en faisant porter les variations dues aux changements de x sur l'expression entre parenthèses $1+\frac{1}{m}=1+\frac{x}{mx}$, devenue alors de la forme $1+\frac{x}{\text{const.}}$.

13*. — Suite : dérivée d'une série.

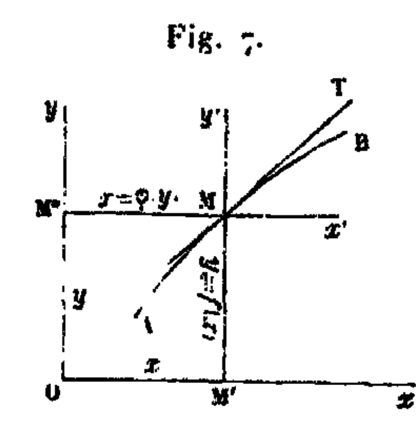
(Compléments, p. 1*).

14. — Dérivée d'une fonction inverse.

Les considérations géométriques facilitent souvent les calculs de dérivées, ou conduisent du moins à des formes intéressantes des résultats de ces calculs.

Si, par exemple, étant donnée une fonction $y = f(x)$, ou plutôt sa dérivée $f'(x)$, pour x correspondant à une certaine valeur désignée y de la fonction, on demande d'obtenir la dérivée de la fonction inverse $x = \varphi(y)$ à l'instant où y y reçoit cette valeur, il suffira de représenter les deux fonctions f, φ par la même courbe plane AB, rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy et considérée, d'une part, dans la figure OM′MB qu'elle forme avec Ox, figure exprimant la fonction directe $y = f(x)$, d'autre part, dans celle, OM″MB, qu'elle forme avec Oy, figure exprimant la fonction inverse $x = \varphi(y)$. Les deux *pentes*, représentant $f'(x)$ et $\varphi'(y)$, de la tangente MT par rapport aux axes Ox, Oy ou à leurs parallèles Mx', My', seront les tangentes trigonométriques des deux angles x'MT, y'MT complémentaires; et, par suite, d'après une propriété connue des tangentes de pareils angles, leur produit vaudra l'unité. On aura donc

Fig. 7.



$$(7)\qquad f'(x)\varphi'(y) = 1; \qquad \text{d'où} \qquad \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

C'est ce qu'on énonce en disant que *les dérivées de deux fonctions inverses sont l'inverse l'une de l'autre ou ont pour produit l'unité.*

On l'aurait, du reste, trouvé encore plus directement, si l'on avait dégagé de la démonstration précédente ses éléments essentiels, en remarquant que deux mêmes accroissements très petits, Δx et Δy, des variables x et y, servent à calculer les deux rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, qui deviennent, à la limite, les deux dérivées respectives $f'(x)$, $\varphi'(y)$. Or, ces rapports ayant pour produit l'unité, il ne peut en être autrement de leurs limites.

15. — Dérivée d'un arc de courbe.

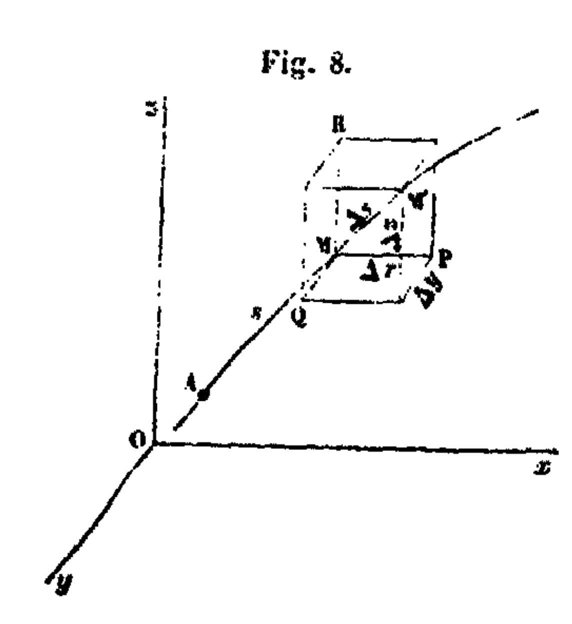
Une construction très simple fait, de même, connaître la dérivée de l'arc, ou du chemin, que parcourt un mobile dont les trois coordonnées

x, y, z, par rapport à un système d'axes rectangulaires, sont trois fonctions données f_1, f_2, f_3 du temps t. Ce chemin, qu'on désigne d'ordinaire par s, se compte à partir du point particulier A (*fig.* 8) de la courbe décrite, où se trouvait le mobile à un moment donné, et positivement pour les époques ultérieures à ce moment, négativement pour les époques antérieures. Il est clair que, ayant une certaine valeur à chaque instant, il constitue bien une fonction de t déterminée, dont la dérivée doit pouvoir s'obtenir dès que l'on connaît, par les trois relations $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$, la loi du mouvement.

Soit AM $= s$ l'arc, parcouru jusqu'à l'époque t où le mobile se trouve en un point M ayant les coordonnées x, y, z, et MM' l'arc très petit décrit, aussitôt après, durant un instant Δt, arc que nous appellerons Δs parce qu'il est l'accroissement de s correspondant à Δt. Et nous désignerons naturellement par $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ les coordonnées de la situation M' du mobile à l'époque $t+\Delta t$, afin que Δx, Δy, Δz expriment les accroissements respectifs reçus par x, y, z lors de ce passage de M à M'.

Ces accroissements se construisent, comme on sait, en menant par M et par M' des plans parallèles aux plans coordonnés des yz, des zx, des xy, et en mesurant, le long des droites MP, MQ, MR formées par leurs intersections mutuelles, l'écart de deux de ces plans qui sont parallèles soit aux yz, soit aux zx, soit aux xy. Les trois arêtes MP, MQ, MR du parallélépipède MPQRM', comptées positivement ou négativement suivant qu'elles sont tirées dans les sens respectifs de Ox, Oy, Oz ou dans les sens contraires, expriment donc Δx, Δy, Δz. Or, la diagonale MM', représentée aussi par $\sqrt{(\mathrm{MP})^2+(\mathrm{MQ})^2+(\mathrm{MR})^2}$, est la corde de l'arc Δs et a avec Δs, d'après le théorème de la fin du n° 5 (p. 16), un rapport très peu différent de l'unité : Δs égale ainsi le produit de $\sqrt{(\mathrm{MP})^2+(\mathrm{MQ})^2+(\mathrm{MR})^2}$ par un facteur tendant vers l'unité quand Δt tend vers zéro, et, comme $\mathrm{MP}=\pm\Delta x$, $\mathrm{MQ}=\pm\Delta y$, $\mathrm{MR}=\pm\Delta z$, le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, dont on se propose d'obtenir la valeur limite, est le produit de

Fig. 8.



$$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}$$

par ce même facteur. Lorsque Δt s'évanouit et que $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ deviennent les dérivées respectives x', y', z', s', on a donc

$$(8) \qquad s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{f'_1(t)^2 + f'_2(t)^2 + f'_3(t)^2}.$$

Tandis que les trois dérivées x', y', z' mesurent les espaces qui, à partir de l'époque t, seraient parcourus suivant les trois axes respectifs, durant une unité de temps, si le mouvement continuait à se faire pendant toute cette unité de temps comme à l'époque t, la dérivée s' mesure l'espace effectif qui serait décrit par le mobile dans les mêmes conditions. Aussi cette dérivée s'appelle-t-elle la *vitesse totale* du mobile, ou simplement sa *vitesse*, alors que x', y', z' n'en sont que les *vitesses suivant les axes*.

Si l'on voulait considérer, et qu'on appelât s, non pas le chemin total parcouru depuis un instant donné, mais la distance actuelle du mobile, mesurée le long même de la courbe, au point A de cette courbe, en la comptant positivement pour les points M qui seraient censés se trouver au delà du point A et négativement pour ceux qui seraient en deçà, l'accroissement Δs et, par suite, la dérivée s' devraient évidemment avoir le signe $+$ aux moments où le mobile *avancerait* sur sa trajectoire et le signe $-$ aux moments où il reculerait. Le radical, dans (8), devrait donc se prendre, suivant les cas, positivement ou négativement. Mais, en Géométrie, on le prend toujours positivement; car on y suppose, pour simplifier, la courbe parcourue d'un mouvement *direct*, c'est-à-dire sans aucune alternative de rétrogradation, en sorte que les accroissements Δs de l'arc soient positifs comme ceux Δt du temps.

De toutes les manières de décrire la courbe, la plus simple est celle où le mobile avance constamment d'un espace égal à 1 dans un temps égal à 1; ce qui, en comptant le temps t à partir du moment où le mobile était en A, rend l'espace s égal au temps t et fait, par conséquent, de l'arc s la variable indépendante. Il vient alors $s' = 1$; et la formule (8), élevée au carré, donne

$$(9) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Ainsi les coordonnées x, y, z ne sont plus alors trois fonctions *distinctes* (c'est-à-dire quelconques toutes les trois) de la variable indépendante s, puisque les carrés de leurs trois dérivées se trouvent astreints à avoir pour somme l'unité; et aucune de ces fonctions n'est même tout à fait *arbitraire*, sa *pente* devant rester toujours comprise entre -1 et $+1$.

Une autre manière simple de décrire la courbe est de faire parcourir au mobile, suivant un des trois axes, celui des x par exemple, des espaces égaux à 1 dans des temps égaux à 1, en sorte que x croisse constamment comme t et que l'on ait même $x = t$ (à la condition de choisir une origine des temps convenable). Alors $x' = 1$ et y, z deviennent deux fonctions de x. La formule (8) se réduit à

$$s' = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}. \tag{10}$$

Enfin, dans le cas particulier d'une courbe plane, on peut prendre son plan pour celui des xy et il vient $z = 0$, $z' = 0$. Les deux équations exprimant y et z en fonction de x se réduisent donc à l'équation ordinaire $y = f(x)$ de la courbe, et la dérivée s' de l'arc est simplement

$$s' = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}. \tag{11}$$

TROISIÈME LEÇON.

SUITE : ÉTUDE DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES.

16. — Notion et dérivée de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique.

On est conduit, le plus simplement possible, à la fonction exponentielle, en cherchant à former, avec les puissances successives (à exposants entiers),

$$\ldots, K^{-n}, \ldots, K^{-2}, K^{-1}, K^0 \text{ ou } 1, K^1, K^2, \ldots, K^n, \ldots$$

d'un nombre K plus grand que 1, les diverses valeurs d'une fonction continue $y=f(x)$ allant de zéro à l'infini ; ce qui revient à construire, avec ces valeurs pour ordonnées, une courbe sans cesse montante, appelée une *logarithmique*, comprise entre les limites $y=0$ et $y=\infty$ quand l'abscisse grandit de $x=-\infty$ à $x=\infty$. Pour que ces puissances $y=K^n$, dont chacune est le produit de la précédente par K, n'augmentent que très peu de l'une à l'autre, il faut prendre ce nombre K à peine plus grand que 1, ou de la forme $1+\frac{1}{m}$, m désignant, par exemple, un nombre entier et positif considérable. De plus, en portant à côté les unes des autres et au-dessus de l'axe des x les ordonnées successives ainsi calculées de la courbe, on devra, pour la continuité, placer chacune d'elles très près de la précédente et, par conséquent, prendre l'abscisse x égale non pas à l'exposant n, dont l'accroissement élémentaire ou le plus petit possible est 1, mais à n fois une très petite fraction de l'unité de longueur, fraction qui représentera ainsi l'unité d'exposant. Or il est naturel de choisir pour cette fraction celle même, $\frac{1}{m}$, qui, ajoutée à l'unité, a donné le nombre K et servi de base à tout le calcul. On aura donc, d'une part, $y=\left(1+\frac{1}{m}\right)^n$, d'autre part, $x=\frac{n}{m}$ ou $n=mx$, et, par conséquent,

en éliminant n,

$$y=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}=\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{x}.$$

D'ailleurs, l'excédent, Δy, d'une ordonnée quelconque $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{n+1}$ sur la précédente $y=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{n}$, et la différence, Δx, des deux abscisses correspondantes $\frac{n+1}{m}$, $\frac{n}{m}$ ou x, seront

$$\Delta y=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{m}-1\right)=\frac{y}{m},\qquad \Delta x=\frac{1}{m};\qquad \text{d'où}\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=y.$$

Ainsi, le rapport de l'accroissement *élémentaire* de la fonction à celui de la variable égale constamment la valeur actuelle de la fonction.

Or, si l'on conçoit, pour réduire de plus en plus l'intervalle des ordonnées, que m grandisse indéfiniment, l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ tendra, comme on a vu (p. 41), vers le nombre e. Il viendra donc, à la limite, l'expression e^x, comme étant la fonction continue cherchée. Dans la courbe qui la représentera, l'accroissement, k, éprouvé par l'ordonnée y pour tout accroissement très petit h de l'abscisse, se composera d'un nombre, accru immensément, de différences élémentaires Δy ayant avec les différences analogues Δx de l'abscisse un rapport, y, très peu différent, pour toutes, de l'ordonnée e^x se rapportant à la première d'entre elles; et, par conséquent, d'après un théorème auquel nous avons recouru plusieurs fois (note de la p. 12), la somme, k, de ces valeurs de Δy sera à celle, h, des valeurs correspondantes de Δx, dans un rapport sensiblement égal encore à e^x, ou, plutôt, de moins en moins différent de e^x si l'on prend de plus en plus faible la valeur absolue de h. Ainsi, *la dérivée de la fonction exponentielle e^x égale la fonction e^x elle-même.*

C'est, du reste, ce que l'on reconnaît avoir déjà lieu sensiblement sur la fonction $y=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}$, prise avec m très grand et supposée rendue continue par l'adjonction d'exposants mx non entiers; car, si l'on y fait croître x d'une très petite quantité h, et que k désigne l'accroissement correspondant, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx+mh}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}$, de y, il vient

$$k=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mh}-1\right]=y\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mh}-1\right],$$

ou bien, en appliquant à $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mh}$ la formule (3) (p. 40),

$$k = y[1 + h(1-\varepsilon) - 1] = hy(1-\varepsilon).$$

Ainsi, le rapport $\frac{k}{h}$ et, par suite, la dérivée de la fonction y sont de la forme $y(1+\varepsilon)$; ce qu'il s'agissait de reconnaître.

La fonction e^x, d'après la formule (4) [p. 42], est la limite de l'expression $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, algébrique si l'on choisit le très grand nombre m commensurable. Nous pouvons même y attribuer à m une valeur positive entière, afin que l'expression soit un simple polynôme; et la formule du *binôme* de Newton (ou plutôt de Pascal), bien connue, donnera aisément, pour ce polynôme ordonné suivant les puissances ascendantes de x,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m &= 1+\frac{m}{1}\frac{x}{m}+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{x^2}{m^2}+\dots\\ &\quad+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n+1}{n}\frac{x^n}{m^n}+\dots\\ &= 1+\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1.2}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{1.2.3}+\dots\\ &\quad+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{x^n}{1.2.3\dots n}+\dots\end{aligned}\right.$$

Or, si, faisant croître m indéfiniment, on considère dans le troisième membre un terme d'un rang très élevé quelconque, mais *fixe*, le $i+1^{\text{ième}}$ par exemple, avec tous ceux qui le précèdent, leur somme tendra vers

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\dots+\frac{x^i}{1.2.3\dots i},$$

car les facteurs en nombre déterminé $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, ..., $1-\frac{i-1}{m}$ y donneront à la limite comme produits l'unité. Et cela sera vrai pour un nombre de termes indéfiniment croissant avec m. Quant aux autres, de plus en plus éloignés, où certains de ces facteurs, comme $1-\frac{n-1}{m}$, resteront sensiblement inférieurs à 1, termes évidemment moindres, en valeur absolue, que leurs analogues dans la série $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\dots$, leur somme tendra vers zéro si la valeur absolue totale des termes, suffisamment éloignés aussi, de cette dernière

série y tend elle-même. Or c'est ce qui a lieu; car, dans l'expression

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}+\ldots,$$

le rapport du $(n+2)^{\text{ième}}$ terme au $(n+1)^{\text{ième}}$ égale $\frac{x}{n+1}$ et tend vers zéro quand n grandit sans limite. Par conséquent, d'après le caractère de convergence le plus simple (p. 8), la série considérée a une valeur finie assignable, parfaitement déterminée, quel que soit x entre $-\infty$ et $+\infty$. La formule (12) deviendra donc, en passant à la limite et remplaçant le premier membre par e^x,

$$(13)\qquad e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

C'est ainsi que la fonction transcendante e^x, réduite en série, constitue, comme on voit, le forme limite d'une fonction algébrique entière, ou d'un simple polynôme. Et l'on reconnaît de suite que cette série a bien pour dérivée une série égale.

La formule (13), en y faisant $x=1$, donne la valeur du nombre e sous la forme très convergente

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

On en déduit, par le calcul du second membre, $e=2,7182818\ldots$ Les diverses puissances de ce nombre deviennent évidemment aussi grandes que l'on veut quand leur exposant est positif et croissant, aussi petites ou, du moins, aussi voisines de zéro que l'on veut quand leur exposant est négatif et décroissant vers $-\infty$; de sorte qu'en y comprenant les valeurs fractionnaires de l'exposant, elles forment bien une suite continue croissant de zéro à l'infini lorsque la variable y grandit de $-\infty$ à $+\infty$.

On conçoit que la formule (13) puisse servir à calculer une Table de cette suite de valeurs, Table où il sera possible de lire à l'inverse, pourvu qu'elle soit assez complète, la valeur même de x correspondant à telle valeur positive de $y=e^x$ que l'on voudra. C'est cette fonction x, inverse de $y=e^x$, qu'on appelle la *fonction logarithmique*, ou, plus précisément, le *logarithme de sa variable* y, et qu'on écrit $\log y$. Elle est évidemment croissante, comme e^x, et même depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; mais sa variable, e^x ou y, n'y varie que de zéro à $+\infty$, rendant la fonction considérée x négative, tant qu'elle est elle-même plus petite que 1, et positive, dès qu'elle dépasse l'unité. On verra plus loin, pour calculer les diverses valeurs de $\log y$, un

procédé beaucoup plus expéditif que la formation et l'emploi d'une Table de la fonction exponentielle. Mais on n'en possède pas de formule *générale* simple analogue à la série (13). Tout ce qu'on peut faire à cet égard, pour la présenter comme limite d'une fonction algébrique, non plus entière (comme pour e^x), mais irrationnelle, c'est de résoudre par rapport à x l'équation (13), qui revient, d'après ce qu'on a vu, à

$$\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^x(1-\varepsilon) = y(1-\varepsilon),$$

si ε désigne une petite quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Or l'extraction de la racine arithmétique $m^{\text{ième}}$ des premier et troisième membres donne, en se servant finalement de la formule (3) [p. 40] pour réduire l'expression $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{m}}$ et en appelant ε_1 une nouvelle quantité très petite sensiblement égale à ε,

$$1 + \frac{x}{m} = \sqrt[m]{y}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{y}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{m}\right);$$

d'où

$$x \quad \text{ou} \quad \log y = m(\sqrt[m]{y} - 1) - \varepsilon_1 \sqrt[m]{y},$$

et, en faisant croître m indéfiniment,

(14) $$\log y = \lim m(\sqrt[m]{y} - 1), \quad \text{pour } m \text{ infini}.$$

La dérivée de cette fonction inverse $x = \log y$ égalera, d'après la règle du n° 14 (p. 43), le quotient de l'unité par la dérivée de la fonction directe $y = e^x$, c'est-à-dire par $y' = e^x = y$. Ainsi, *la dérivée de la fonction logarithmique* $x = \log y$ *est simplement l'inverse* $\frac{1}{y}$ *de sa variable.*

La principale propriété des logarithmes résulte de ce qu'ils représentent *proportionnellement* des exposants entiers de $1 + \frac{1}{m}$ qui s'ajoutent ensemble quand on multiplie les puissances correspondantes, lesquelles expriment (à la limite ou pour m infini) des *nombres* positifs quelconques : elle consiste donc en ce que *le logarithme d'un produit égale la somme des logarithmes de ses facteurs.* Et l'on sait combien sont nombreux les calculs, presque impraticables autrement, qu'elle rend aisés, quand on possède une Table contenant les logarithmes d'une suite un peu étendue de nombres entiers. Or on sait aussi que ces calculs, dans le système décimal usuel de numération, deviennent encore plus commodes, en inscrivant sur la Table, vis-à-vis *des*

nombres et au lieu des valeurs correspondantes de la fonction logarithmique, leurs rapports au logarithme, 2,30259 à fort peu près, de la *base* 10 qui donne au système (par ses puissances à exposants entiers) toutes les *unités,* grandes ou petites, indispensables. On remplace ainsi les logarithmes par des quantités qui, leur étant proportionnelles, jouissent encore de la propriété de se combiner par voie d'addition dans la formation d'un produit, et dont, en même temps, la plus simple qui fût disponible, 1, correspond à la base 10 du système : avantage considérable, car il en résulte que les déplacements de la virgule décimale dans un nombre, équivalant à une multiplication par une puissance de 10, n'ont sur la quantité représentative de son logarithme d'autre effet que d'en modifier la partie entière. Ces quantités s'appellent *logarithmes décimaux;* et l'on qualifie de *naturels* ou de *népériens,* pour les en distinguer, les logarithmes proprement dits, valeurs de la fonction logarithmique, qui égalent leurs produits par $\log 10 = 2,30259$.

En général, a étant un nombre positif quelconque, on appelle *logarithmes à base* a les quotients des logarithmes naturels $\log y$ des divers nombres y par le logarithme naturel de a. On se sert du signe log pour désigner ces quotients; mais, afin d'éviter toute confusion, je les exprimerai par leur formule explicite $\frac{\log y}{\log a}$ et j'écrirai $u = \frac{\log y}{\log a}$, en désignant ainsi par u la fonction de y qu'ils constituent. Ils ne se présenteront, du reste, jamais plus ailleurs dans ce Cours, les seuls que l'on rencontre naturellement en Mécanique et en Physique étant ceux qui ont pour base le nombre e, c'est-à-dire ceux qui sont népériens. Ces logarithmes à base quelconque peuvent aussi s'écrire $\frac{1}{\log a}\log y$. L'inverse du logarithme naturel de la base, qui y figure comme le facteur par lequel il faut, pour les obtenir, multiplier les logarithmes naturels, s'appelle *module :* il égale $\frac{1}{2,30259} = 0,434294\ldots$ dans le cas des logarithmes décimaux.

Comme la dérivée du produit $\frac{1}{\log a}\log y$ s'obtient en multipliant le facteur constant $\frac{1}{\log a}$ par la dérivée $\frac{1}{y}$ de l'autre facteur $\log y$ $\left(\text{ce qui donne } u' = \frac{1}{y \log a}\right)$, on voit que *la dérivée du logarithme d'une variable égale l'inverse du produit de cette variable par le logarithme népérien de la base.*

De la relation $u = \frac{\log y}{\log a}$, ou $\log y = u \log a$, et en se rappelant que

$\log y$ désigne l'exposant dont il faut affecter le nombre e pour obtenir y, on déduit

$$y = e^{u \log a} = (e^{\log a})^u$$

et enfin, vu que $e^{\log a}$ exprime de même a,

$$y = a^u.$$

Ainsi la fonction $y = a^u$ est l'inverse de la fonction $u = \frac{\log y}{\log a}$. On l'appelle l'*exponentielle à base* a. Sa dérivée sera elle-même, par suite, l'inverse de la dérivée $\frac{1}{y \log a}$ de u, et elle vaudra $y \log a$ ou $a^u \log a$. Donc *l'exponentielle a^u, où l'exposant est pris comme variable indépendante, a pour dérivée le produit de sa propre valeur par le logarithme népérien de la base a*. On voit que, dans le cas particulier $a = e$, où la fonction se réduit à e^x, la dérivée devient bien égale à la fonction, car $\log e = 1$.

Pour développer l'exponentielle a^u, ou $e^{u \log a}$, en une série procédant suivant les puissances ascendantes de u, il suffit évidemment de remplacer x, dans la formule (13) de e^x, par la valeur $u \log a$ de l'exposant de e.

17. — Notion et dérivée des fonctions circulaires.

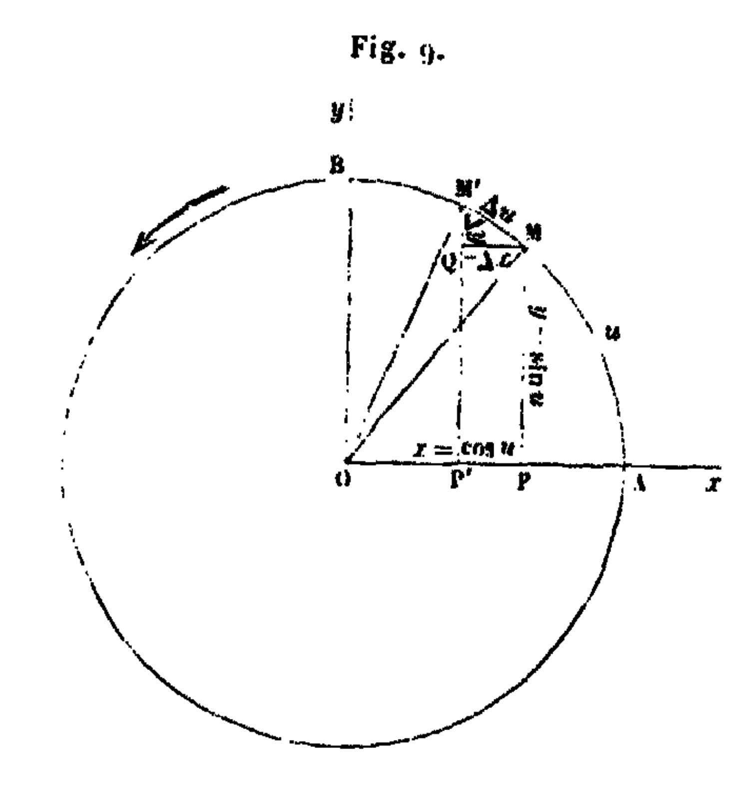
Imaginons qu'une circonférence de rayon 1 (p. 54), rapportée à deux axes rectangulaires d'abscisses x et d'ordonnées y passant par son centre, soit parcourue indéfiniment par un mobile M, suivant le sens de Ox vers Oy dans l'angle droit xOy ou de Oy vers Ox hors de cet angle, et que, de plus, l'arc décrit $u = \text{AM}$ se compte, à partir d'un instant où le point M se soit trouvé en A sur la partie positive de l'axe des x, positivement pour les époques ultérieures, négativement pour les époques antérieures : on sait que l'abscisse $x = \text{OP}$ et l'ordonnée $y = \text{PM}$ du mobile à un instant quelconque seront dites, respectivement, le *cosinus* et le *sinus* de cet arc u. En d'autres termes, les deux fonctions $\cos u$, $\sin u$ sont celles qui expriment les deux coordonnées quand, dans le cercle considéré de rayon 1, on prend l'arc pour variable indépendante, comme on a vu au n° 15 (p. 45) qu'il était possible de le faire dans toute courbe.

De là résultent immédiatement plusieurs conséquences.

1° Observons, d'une part, que des points de la circonférence symétriques par rapport à Ox ont même abscisse x, mais des ordonnées y égales et de signes contraires; d'autre part, qu'ils sont atteints par le mobile à des instants où l'arc u a aussi des valeurs égales, mais de

signes contraires, et nous verrons que, l'arc ou la variable u changeant de signe, son sinus en change, tandis que son cosinus reste le même. C'est ce que l'on exprime, vu l'analogie (sous ce rapport) du sinus avec les puissances de u à exposant impair et du cosinus avec

Fig. 9.



les puissances de u à exposant pair, en disant que le cosinus est une *fonction paire* de l'arc et le sinus une *fonction impaire*.

2° De même, deux points symétriques par rapport à Oy, ou ayant même ordonnée y, mais des abscisses x égales et contraires, sont atteints par le mobile à deux instants où l'arc u est, pour l'un, inférieur et, pour l'autre, supérieur au *quadrant* $AB = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, d'une même quantité telle que BM, que j'appellerai v. On a donc, quel que soit v,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + v\right), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + v\right);$$

ce qui s'énonce en disant que, lorsque deux arcs $\frac{\pi}{2} - v$, $\frac{\pi}{2} + v$ sont *supplémentaires* ou ont pour somme algébrique une demi-circonférence π, leurs sinus sont égaux, mais, leurs cosinus, égaux et de signes contraires.

3° Chaque fois que l'arc croît d'une demi-circonférence π, le cosinus et le sinus changent simplement de signe, car le point M est alors remplacé par l'autre extrémité du diamètre qui en émane; et c'est, du reste, ce qu'on peut conclure des deux formules précédentes,

susceptibles d'être écrites

$$\sin\left(v-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(v+\frac{\pi}{2}\right),\qquad \cos\left(v-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(v+\frac{\pi}{2}\right)$$

si l'on se rappelle que le sinus est une fonction impaire et le cosinus une fonction paire.

4° Les deux fonctions sinus et cosinus redeviennent, par suite, les mêmes quand l'arc, ou le chemin parcouru par le mobile M, varie d'une circonférence entière 2π (ce qui ramène, en effet, ce mobile dans sa position antérieure) : propriété très importante. On l'énonce en disant que les fonctions sinus et cosinus sont *périodiques* et de *période* 2π.

5° Enfin, si l'on prenait les y pour abscisses et les x pour ordonnées, en comptant, par conséquent, les arcs, que j'appellerai v, à partir du point B de l'axe des y et positivement dans le sens de Oy vers Ox, on aurait évidemment, à cause de la parité de forme et de la symétrie d'une circonférence par rapport à tous ses diamètres,

$$x \text{ ou } \cos u = \sin v, \qquad y \text{ ou } \sin u = \cos v.$$

Et chaque point M serait, d'ailleurs, atteint par le mobile à un instant où le nouvel arc $v = \text{BM}$, joint à l'arc du cas précédent $\text{AM} = u$, donnerait une somme constante, savoir, le quadrant AB ; car un point atteint par le mobile avant un autre dans la première manière de décrire les arcs, l'est après dans la seconde ; ce qui fait que sa distance à cet autre point (mesurée le long du cercle) s'ajoute dans celle-ci pour donner la valeur de v qui lui est relative, mais se retranche dans la première pour donner la valeur correspondante du u, et ne produit ainsi aucun changement dans la somme $u+v$. On a donc $v=\frac{\pi}{2}-u$; et les deux relations $\cos u=\sin v$, $\cos v=\sin u$ prouvent que deux arcs *complémentaires*, ou ayant pour somme le quart $\frac{\pi}{2}$ de la circonférence, ont chacun leur cosinus égal au sinus de l'autre.

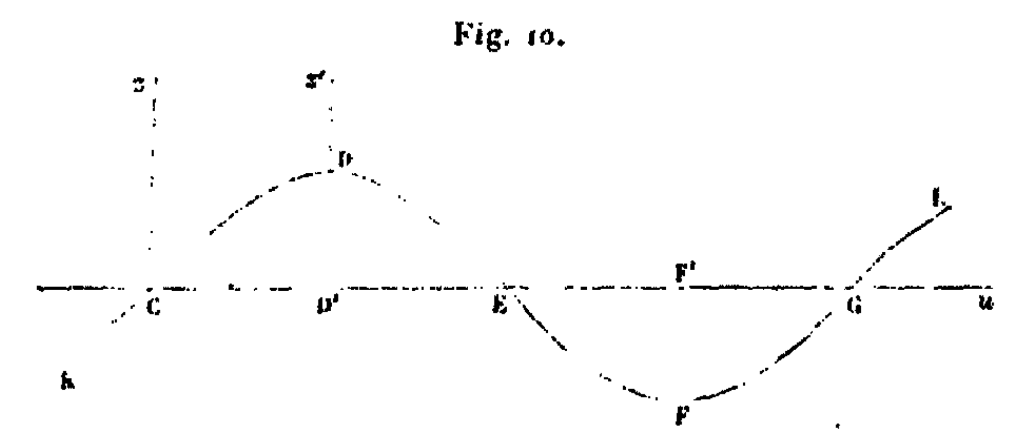
Cette dernière propriété qui, jointe à certaines des précédentes, permet d'écrire

$$\cos u=\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right),\quad \sin u=\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+u\right),$$

montre que les deux fonctions sinus et cosinus ne sont que deux formes différentes d'une seule et même fonction. Si cette fonction regardée comme fondamentale est, par exemple, le sinus, il suffira

de le considérer pour la valeur de sa variable dépassant de $\frac{\pi}{2}$ un arc donné et l'on aura le cosinus de cet arc. C'est ce que l'on fait d'ordinaire, en prenant pour représenter la fonction une *sinusoïde* KL,

Fig. 10.



courbe plane dont l'équation, avec les arcs u de la circonférence précédente pour abscisses et leurs sinus pour ordonnées z, est $z = \sin u$, et dont les *arceaux* successifs CDE, EFG, ... tous égaux entre eux et symétriques par rapport à leur ordonnée maxima D'D, F'F, ..., mais alternativement situés au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses, ont pour leur *base* CE ou EG, ... une demi-circonférence π déroulée et, pour leur *hauteur* DD' ou FF', ..., son rayon 1. Il serait peut-être plus naturel de regarder comme fondamentale la fonction cosinus (ce qui reviendrait à faire passer l'axe des ordonnées, D'z', par le *sommet* D d'un arceau supérieur et non par sa première extrémité C); car les formules où peuvent figurer soit des cosinus, soit des sinus, prennent très souvent leur forme la plus simple quand on donne la préférence aux cosinus.

Enfin, toujours dans le cercle AMB (p. 54) la *pente*, $\frac{y}{x}$ ou $\frac{\sin u}{\cos u}$, de la droite joignant ensemble le centre O et l'extrémité mobile M de l'arc AM $= u$ est une autre fonction circulaire importante, impaire comme le sinus, appelée la *tangente* de l'arc u. Une tangente menée à l'extrémité fixe A de l'arc, depuis ce point A jusqu'à la rencontre du prolongement de la droite en question OM ou MO, et comptée positivement ou négativement suivant qu'elle se trouve du côté des y positifs ou du côté des y négatifs, représente, comme on sait, cette troisième fonction circulaire. Et la tangente, $\frac{\sin v}{\cos v}$, du complément $v = \frac{\pi}{2} - u$ de l'arc u, ou, autrement dit, le rapport $\frac{\cos u}{\sin u}$ inverse du précédent, en est une quatrième, dite la *cotangente* de l'arc u. Ces deux nouvelles fonctions circulaires se distinguent des deux premières,

sinus et cosinus : 1° en ce que, représentant leurs rapports, elles restent les mêmes quand un accroissement π donné à l'arc change les signes du sinus et du cosinus, de sorte que leur période est π et non 2π; 2° en ce que l'annulation de leur dénominateur $\cos u$ ou $\sin u$, pour les valeurs de l'arc égales aux multiples impairs ou pairs de $\frac{\pi}{2}$, les fait, dans chaque intervalle π, passer une fois par l'infini avec changement de signe, de manière qu'elles y parcourent ensuite graduellement toute l'échelle des grandeurs entre $-\infty$ et $+\infty$, tandis que le sinus et le cosinus ne cessent jamais d'être continus entre les limites -1 et $+1$ de leurs oscillations.

Cherchons actuellement les dérivées de ces quatre fonctions. Pour avoir celles du sinus et du cosinus, faisons croître l'arc $AM = u$ (p. 54) d'une très petite quantité $\Delta u = \text{arc}\,MM'$, dont le rapport à sa corde MM' sera, d'après un théorème démontré au n° 5 (p. 16), de la forme $1+\varepsilon$, si ε désigne une quantité tendant vers zéro en même temps que Δu; et comparons, à cet accroissement $\Delta u = (1+\varepsilon)(MM')$, l'accroissement correspondant Δy du sinus, c'est-à-dire, en valeur absolue, la différence $P'M' - PM = QM'$, ainsi que celui Δx du cosinus ou encore, en valeur absolue, la différence $OP - OP' = P'P = QM$. On aura donc

$$(15)\quad \text{(en valeur absolue)}\ \frac{\Delta \sin u}{\Delta u} = \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{QM'}{MM'},\qquad \frac{\Delta \cos u}{\Delta u} = \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{QM}{MM'}.$$

Or le triangle rectangle QMM' donne, d'après une propriété connue,

$$\frac{QM'}{MM'} = \cos QM'M,\qquad \frac{QM}{MM'} = \sin QM'M.$$

De plus, l'angle aigu $QM'M$, qui a déjà un côté, QM', perpendiculaire au côté OA de l'angle $AOM = u$, tend à avoir son autre côté, MM', perpendiculaire à l'autre, OM, du même angle AOM; car, le triangle isoscèle MOM' ayant son angle O au sommet de plus en plus petit à mesure que décroît MM', son angle M à la base, demi-supplément de l'angle au sommet, s'approche indéfiniment d'un droit : $QM'M$ diffère donc aussi peu qu'on veut d'un angle, aigu comme lui, dont les côtés seraient perpendiculaires à ceux de AOM. Par suite, cet angle aigu vers lequel tend $QM'M$ a, aux signes près, même sinus et même cosinus que AOM ou l'arc u; car, quels que soient le signe et la grandeur de u, le cosinus et le sinus de u sont les deux coordonnées x et y du point M, c'est-à-dire, en valeur absolue, le cosinus et le sinus de l'angle AOM considéré comme positif et inférieur à deux droits, angle qu'on sait être alors ou l'égal

ou le supplémentaire de celui dont les côtés sont normaux aux siens et qui a ainsi même sinus et même cosinus que lui en valeur absolue. Donc, les rapports $\frac{QM'}{MM'}$, $\frac{QM}{MM'}$ et, par suite, d'après (15), $\frac{\Delta \sin u}{\Delta u}$, $\frac{\Delta \cos u}{\Delta u}$, tendent, sauf peut-être quant aux signes, vers les limites respectives $\cos u$, $\sin u$. Or la vue de la figure (p. 54) montre que le sinus grandit, ou que $\Delta \sin u$ a le signe de Δu, toutes les fois que le point M est, par rapport à l'axe des y, du côté des x positifs, c'est-à-dire quand $\cos u$ est positif, et que $\Delta \sin u$ est, au contraire, négatif, du côté des x négatifs, où l'on a $\cos u < 0$. Ainsi le rapport $\frac{\Delta \sin u}{\Delta u}$ a le même signe que $\cos u$ et lui devient égal à la limite. Quant aux variations $\Delta \cos u$ du cosinus, la vue de la figure montre qu'elles sont négatives au-dessus de l'axe des x, là où $\sin u$ se trouve positif, positives au-dessous, là où $\sin u$ se trouve négatif : bref, leur signe est contraire à celui de $\sin u$, et puisque le rapport $\frac{\Delta \cos u}{\Delta u}$ devient, à la limite, $+ \sin u$ ou $- \sin u$, ce ne peut être que $- \sin u$. En résumé, *quand l'arc est la variable indépendante, le sinus a pour dérivée le cosinus et le cosinus a pour dérivée le sinus changé de signe.*

La relation (9) [p. 45], existant, dans toute courbe rapportée à un système d'axes rectangulaires, entre les dérivées des trois coordonnées supposées exprimées en fonction de l'arc, se réduit à $y'^2 + x'^2 = 1$ quand la courbe est située dans le plan des xy. Or c'est le cas de notre cercle, représenté (u désignant l'arc) par les deux équations $x = \cos u$, $y = \sin u$. Comme il en résulte $x' = - \sin u$, $y' = \cos u$, cette formule $y'^2 + x'^2 = 1$ donne donc, entre le cosinus et le sinus d'une variable quelconque u, la relation fondamentale

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1. \tag{16}$$

On l'aurait, du reste, déduite immédiatement de l'équation du cercle, en vertu de laquelle le carré, $(OP)^2 + (PM)^2$ ou $x^2 + y^2$, du rayon OM (p. 54), est constant et égal à l'unité.

En prenant maintenant, d'après une règle du n° 11 [p. 37, seconde formule (2)], les dérivées des deux fractions $\frac{\sin u}{\cos u}$ et $\frac{\cos u}{\sin u}$, il viendra, pour les dérivées respectives de $\tan u$ et de $\cot u$,

$$\frac{(\cos u)(\cos u) - (\sin u)(-\sin u)}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

et

$$\frac{(\sin u)(-\sin u) - (\cos u)(\cos u)}{\sin^2 u} = -\frac{1}{\sin^2 u}.$$

Ainsi, *la dérivée de la tangente égale l'inverse du carré du cosinus et, celle de la cotangente, l'inverse du carré du sinus changé de signe.*

On voit que chacune de ces deux fonctions a sa dérivée toujours de même signe : elles sont donc, quand leur variable grandit, l'une, constamment croissante, l'autre, constamment décroissante, partout où elles varient graduellement. Et, en effet, dans chaque intervalle π où se font de $\mp\infty$ à $\pm\infty$ les variations continues soit de la tangente $\frac{\sin u}{\cos u}$, soit de la cotangente $\frac{\cos u}{\sin u}$, ces variations sont toujours de même sens. Le passage inverse de $\pm\infty$ à $\mp\infty$ se produit par le saut brusque ordinaire aux fractions dont le dénominateur s'annule : il a lieu entre la fin d'un intervalle et le commencement du suivant, à un instant où n'existe plus la continuité de la fonction ni, par suite, sa dérivée.

Enfin, aux fonctions circulaires ou trigonométriques *directes*

$$z = \sin u, \quad z = \cos u, \quad z = \operatorname{tang} u, \quad z = \cot u,$$

il correspond évidemment des fonctions inverses, où l'arc u est considéré comme dépendant de z, c'est-à-dire de son sinus, ou de son cosinus, ou de sa tangente, ou de sa cotangente. On les appelle *fonctions circulaires inverses* et on les désigne respectivement par les signes arc sin, arc cos, arc tang, arc cot, suivis de l'expression même de la variable qui est ici z, dénominations signifiant alors *arc qui a pour sinus* z, ou *arc qui a pour cosinus* z, etc.

Contrairement à ce qui arrivait pour la fonction logarithmique, elles ne sont pas complètement déterminées; car, par exemple, un même sinus donné peut être celui d'une infinité d'arcs différents. Aussi faut-il, quand on les emploie, définir par quelque condition accessoire le *champ*, c'est-à-dire l'intervalle où on les suppose comprises, en choisissant pour les limites de cet intervalle deux arcs, distants de π, tels que, u variant de l'un à l'autre, la variable z aille ou en y augmentant toujours, ou en y diminuant toujours, de manière à ne pas passer deux fois par la même valeur et, par conséquent, à ne pas donner deux valeurs de u pour une seule z qu'elle aurait elle-même. Donc, si z est un sinus, on ne fera, à moins d'avis contraire, mouvoir l'extrémité M de l'arc $u = \text{AM}$ (p. 54) que d'un seul côté de l'axe des y, savoir du côté des x positifs quand on voudra que u grandisse en même temps que son sinus z, et du côté des x négatifs quand l'arc u devra, au contraire, décroître pendant que son sinus grandira. D'ordinaire, on choisit l'arc entre les limites $\mp\frac{\pi}{2}$ ou le plus petit en

valeur absolue de tous ceux qui ont même sinus, et u croît ainsi de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ pendant que son sinus varie de -1 à 1. Il en est de même de l'arc tangente, qu'on fait croître de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ pendant que sa tangente z parcourt de $-\infty$ à $+\infty$ toute l'échelle des grandeurs. Pour l'arc cosinus, on prend l'extrémité M de l'arc $AM = u$ soit du côté des y positifs ou au-dessus de l'axe des x, quand u doit varier en sens inverse de son cosinus z, soit du côté des y négatifs, au-dessous de l'axe des x, quand u doit varier dans le même sens que son cosinus : le plus souvent, u y est supposé le complément de l'arc, compris entre les limites $\mp\frac{\pi}{2}$, qui a $z = \cos u$ pour sinus; ce qui revient à faire décroître u de π à zéro quand son cosinus z grandit de -1 à 1. Et, de même, l'arc cotangente décroît de π à zéro pendant que sa cotangente $z = \frac{\cos u}{\sin u}$ grandit de $-\infty$ à $+\infty$.

D'après la règle du n° 14 (p. 43) et en se rappelant que les dérivées de $\sin u$, $\cos u$, $\operatorname{tang} u$, $\cot u$ sont $\cos u$, $-\sin u$, $\frac{1}{\cos^2 u}$, $\frac{-1}{\sin^2 u}$, les dérivées de $u = \operatorname{arc}\sin z$, $u = \operatorname{arc}\cos z$, $u = \operatorname{arc}\operatorname{tang} z$, $u = \operatorname{arc}\cot z$ vaudront respectivement $\frac{1}{\cos u}$, $\frac{-1}{\sin u}$, $\cos^2 u$, $-\sin^2 u$. Ainsi la dérivée de $u = \operatorname{arc}\sin z$ sera, vu la relation (16),

$$\frac{1}{\cos u} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

où le radical devra être pris positif si l'arc u est compris entre $\mp\frac{\pi}{2}$ et que, par conséquent, $\cos u$ soit positif. De même, la dérivée de $u = \operatorname{arc}\cos z$ sera

$$\frac{-1}{\sin u} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 u}} = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}},$$

où le radical devra encore être pris positif, comme l'est $\sin u$, si l'arc u est compris entre zéro et π. Quant aux dérivées, $\cos^2 u$ et $-\sin^2 u$, de $u = \operatorname{arc}\operatorname{tang} z$ et de $u = \operatorname{arc}\cot z$, en y exprimant, d'après (16), $\cos^2 u$ et $\sin^2 u$ en fonction de $\operatorname{tang} u = \frac{\sin u}{\cos u}$ ou de $\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$, elles deviennent respectivement $\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 u}$ et $\frac{-1}{1+\cot^2 u}$, c'est-à-dire $\frac{1}{1+z^2}$ et $\frac{-1}{1+z^2}$. Si donc on joint ces résultats à la dérivée $\frac{1}{z}$ de la fonction trans-

cendante inverse $\log z$ considérée au numéro précédent, on pourra dire que *les fonctions transcendantes inverses* $\log z$, $\operatorname{arc}\sin z$, $\operatorname{arc}\cos z$, $\operatorname{arc}\operatorname{tang} z$, $\operatorname{arc}\cot z$ *ont pour dérivées, respectivement, les fonctions algébriques* $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, $\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$, $\frac{1}{1-z^2}$, $\frac{-1}{1-z^2}$.

18*. — Discontinuités spéciales à la fonction logarithmique ou à d'autres fonctions transcendantes.

(Compléments, p. 5*.)

19*. — Sinus et cosinus de la somme de deux arcs; formule de Moivre.

(Compléments, p. 6*.)

20*. — Équations algébriques, à racines réelles, qui se résolvent trigonométriquement.

(Compléments, p. 12*.)

21*. — Développements de $\cos x$ et de $\sin x$ en série.

(Compléments, p. 22*.)

Nous retrouverons dans la IXe Leçon (n° 95) ces développements nécessaires à connaître, auxquels nous arriverons alors d'une manière plus simple.

22*. — Décomposition de $\cos x$ et de $\sin x$ en facteurs; formule de Wallis, etc

(Compléments, p. 24*.)

23*. — Des fonctions hyperboliques.

(Compléments, p. 29*.)

Contentons-nous ici de dire qu'on appelle *cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique* d'une variable x, et qu'on exprime respectivement par $\cosh x$, $\sinh x$, $\operatorname{tangh} x$, les trois fonctions $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$, $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, dont la première est *paire* comme $\cos x$, et dont les deux autres sont impaires comme $\sin x$ et $\operatorname{tang} x$. Elles présentent la plus grande analogie *analytique* avec ces fonctions circulaires, quoique leur allure soit tout autre et que, par exemple, elles grandissent sans cesse, de $x=0$ à $x=\infty$, au lieu d'être périodiques.

24*. — Des exponentielles imaginaires.

(Compléments, p. 33*.)

*** — Note sur la représentation géométrique et la théorie générale des quantités imaginaires ou complexes.**

(Compléments, p. 36*.)

QUATRIÈME LEÇON.

OBJET ET MÉTHODE DE L'ANALYSE INFINITÉSIMALE; SA DIVISION EN CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL. — CALCUL DIFFÉRENTIEL : NOTION DE DIFFÉRENTIELLE; DIFFÉRENTIATION D'UNE FONCTION ET D'UNE FONCTION DE FONCTION.

---

25. — Objet de l'Analyse infinitésimale. Des infiniment petits.

Maintenant que nous avons acquis une idée nette des fonctions en nous familiarisant avec les plus simples d'entre elles, nous pouvons définir l'*Analyse infinitésimale*.

Le but de cette Science est précisément l'étude des fonctions continues à variations graduelles, étude comprenant, d'une part, la recherche de leurs propriétés générales et de la manière dont on peut suivre leur marche ou en exprimer les diverses circonstances, d'autre part, le calcul de leurs valeurs d'après les conditions qui les déterminent dans chaque cas. On comprendra l'importance d'une pareille étude, en observant que, dans l'univers, tout se transforme par d'insensibles nuances, par de continuels et inappréciables changements, et que ces changements eux-mêmes, renouvelés d'instant en instant, se modifient peu à peu; que tout, en un mot, varie avec continuité et graduellement. Car la nature ne fait pas de sauts (*natura non facit saltus*), comme dit une maxime probablement bien ancienne, mais dont personne n'a mieux fait ressortir tous les sens que Leibnitz, le principal fondateur, au XVII[e] siècle, de l'Analyse infinitésimale. Ainsi, les quantités propres à exprimer ou à mesurer les objets et les phénomènes sont des fonctions soumises aux lois de cette analyse.

Il est naturel, pour suivre dans sa marche une fonction continue, d'attribuer à chaque variable indépendante des accroissements très faibles, que l'on supposera de plus en plus petits. La fonction reçoit, par le fait même, des accroissements très petits aussi, positifs ou négatifs, et qui diminuent indéfiniment en valeur absolue. On est bien obligé de les faire tendre de la sorte vers zéro, si l'on veut ne laisser échapper aucune valeur de la fonction, aucune circonstance de son

cours; et l'on imite également ainsi la nature, qui règle par variations extrêmement faibles, tout à fait insensibles à nos sens, l'écoulement du temps, sa principale variable indépendante, et la transformation corrélative des choses.

De telles quantités, prises très petites et *que l'on fait tendre vers zéro,* sont appelées des *infiniment petits.* On les désigne ainsi, non à raison de leur valeur présente (puisqu'elles sont actuellement finies), mais à raison de ce qu'on veut qu'elles deviennent. Si, en effet, on les introduit dans certaines opérations, ce n'est pas précisément pour connaître les résultats actuels de celles-ci, c'est pour chercher ce qu'ils deviendront *à la limite*, ou de quelles valeurs ils s'approcheront indéfiniment à mesure que les quantités en question approcheront elles-mêmes de zéro, seul nombre qui, considéré comme point de départ d'une grandeur naissante ou comme dernier terme des décroissements d'une grandeur évanouissante, soit, à proprement parler, infiniment petit : autrement dit, la qualification de quantités *infiniment petites* signifie que l'on veut connaître *seulement* les limites vers lesquelles tendent les résultats des calculs où on les fait paraître.

Les calculs dont il s'agit n'ont d'ailleurs d'intérêt qu'autant que les limites de leurs résultats sont ou, du moins, peuvent être finies, déterminées et susceptibles de prendre, suivant les cas, des valeurs infiniment variées, à l'image même de la diversité infinie des phénomènes dont elles doivent pouvoir reproduire les traits; sans quoi leur étude ne fournirait pas la matière d'une véritable et importante branche des sciences rationnelles. Aussi y a-t-il deux sortes de ces calculs; car il existe deux genres d'opérations susceptibles de conduire à des résultats finis, utilisables *même à la limite,* et *divers,* quand on les effectue sur des quantités que l'on fait décroître indéfiniment. Ce sont celles qui consistent soit à prendre le rapport de deux infiniment petits, soit à faire la somme d'une infinité d'infiniment petits, c'est-à-dire d'un nombre de plus en plus grand de quantités de plus en plus petites. Le rapport, dans le premier cas, reste fini, même à la limite, si les deux termes décroissent à la fois sans jamais cesser d'être comparables l'un à l'autre, comme il arrivait dans tous les calculs de fonctions dérivées effectués précédemment. La somme, dans le second cas, peut aussi tendre vers une limite finie, si le nombre des quantités que l'on ajoute devient d'autant plus grand que chacune de ces quantités devient plus petite; et c'est également ce dont nous avons vu des exemples, notamment quand nous avons démontré que le rapport de deux accroissements simultanés finis d'une fonction et de sa variable

égalait la dérivée prise pour une valeur intermédiaire de cette variable.

26. — Principe général du calcul des infiniment petits.

L'analyse des infiniment petits est rendue, en général, beaucoup plus simple que celle des quantités finies, par le principe suivant :

Dans tout calcul, un infiniment petit peut être remplacé par tout autre qui a avec lui un rapport tendant vers l'unité.

Démontrons, pour les deux espèces de calculs, ce principe, qu'on reconnaît de suite avoir été appliqué déjà plusieurs fois dans les deux deux dernières Leçons (pp. 44 et 57), quand, à un arc qui décroissait jusqu'à zéro, l'on a substitué sa corde.

1° *Calcul d'un rapport.*

Appelons α et α_1 deux infiniment petits, c'est-à-dire deux quantités très petites que l'on veut faire tendre vers zéro et dont le rapport tend vers une limite qu'on se propose seule d'évaluer. Supposons que deux autres infiniment petits, β et β_1, diffèrent de α et α_1, mais de telle manière que leurs rapports respectifs à α et α_1 tendent vers l'unité. Je dis qu'on pourra substituer le rapport $\frac{\beta}{\beta_1}$ au rapport $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, sans commettre d'erreur à la limite.

En effet, puisque $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers l'unité, si nous posons $\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon$, ε désignera une quantité *évanouissante,* c'est-à-dire tendant vers zéro en même temps que α. On aura, de même, $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1$, en appelant ε_1 une quantité analogue à ε. Or, de ces relations, on tire

$$\beta = \alpha(1 + \varepsilon), \qquad \beta_1 = \alpha_1(1 + \varepsilon_1)$$

et, par suite,

$$\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\alpha}{\alpha_1}\,\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\dfrac{\beta}{\beta_1}}{\dfrac{\alpha}{\alpha_1}} = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_1}.$$

A la limite, le second membre $\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_1}$ se réduit à l'unité et, comme les deux rapports $\frac{\beta}{\beta_1}$, $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, ainsi que le quotient de l'un par l'autre, s'approchent à la fois, avec continuité, de leurs limites respectives $\lim \frac{\beta}{\beta_1}$,

$\lim \frac{\alpha}{\alpha_1}$ et 1, il vient

$$\frac{\lim \frac{\beta}{\beta_1}}{\lim \frac{\alpha}{\alpha_1}} = 1.$$

C'est dire que, si la limite du rapport $\frac{\alpha}{\alpha_1}$ est nulle ou finie (ce qu'on suppose puisqu'on cherche à l'évaluer), la limite du rapport $\frac{\beta}{\beta_1}$ lui sera bien égale.

2° *Calcul d'une somme.*

Quand une infinité d'infiniment petits se suivent dans une somme algébrique, il y en a toujours une infinité à la suite qui ont même signe; parce que, la loi de la continuité relative des choses les astreignant à varier d'une manière graduelle, chacun d'eux ne diffère en général du précédent que par une fraction infiniment petite de sa propre valeur. Les changements de signe au passage d'un terme à l'autre ne se produisent ainsi que *de loin en loin;* et la somme considérée peut se subdiviser en sommes partielles, composées chacune d'une infinité de termes de même signe.

Bornons-nous donc à une de ces sommes partielles, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n$; et admettons qu'elle tende vers une limite finie, à mesure que chacun des termes désignés par la lettre α s'approche de zéro, tandis que leur nombre augmente de plus en plus. Je dis qu'on pourra remplacer cette somme $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ par la somme $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$, pourvu que les rapports des nouveaux infiniment petits $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ aux précédents $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tendent vers l'unité, c'est-à-dire pourvu que l'on ait, en appelant $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ des quantités évanouissantes,

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1+\varepsilon_1, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1+\varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1+\varepsilon_n.$$

Cela résulte immédiatement d'un théorème, déjà plusieurs fois invoqué, sur une suite de rapports que l'on ajoute terme à terme (p. 12). Ces rapports, à dénominateurs tous de même signe, sont ici $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\beta_n}{\alpha_n}$, et leur addition terme à terme donne le nouveau rapport, intermédiaire entre le plus petit et le plus grand,

$$\frac{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}.$$

Pour abréger l'écriture, on convient d'exprimer chaque somme par

le signe Σ suivi de la lettre désignant les divers termes de la somme : ainsi, $\Sigma\alpha$ (qu'on lit *somme* ou *sigma* de α), $\Sigma\beta$ seront des manières abrégées d'écrire respectivement $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$. Le nouveau rapport intermédiaire obtenu se trouvera donc représenté par $\frac{\Sigma\beta}{\Sigma\alpha}$; et, comme il ne pourra manquer de tendre vers 1 en même temps que tous les rapports $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\beta_n}{\alpha_n}$, on aura

$$\frac{\lim\Sigma\beta}{\lim\Sigma\alpha} = 1,$$

ce qui démontre évidemment le théorème quand la limite de $\Sigma\alpha$ est ou nulle ou finie.

On pourrait aussi, de la relation $\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon$, résumant toutes celles qui définissent les rapports respectifs de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tirer l'expression, non moins générale, $\beta - \alpha = \alpha\varepsilon$, de la différence $\beta - \alpha$ qui existe entre deux termes correspondants des deux sommes considérées. Alors, en ajoutant toutes les expressions particulières qu'elle donne quand on y affecte successivement α et ε des indices $1, 2, 3, \ldots, n$, on aurait $\Sigma(\beta - \alpha) = \Sigma\alpha\varepsilon$. Or chaque terme, $\alpha\varepsilon$, de $\Sigma\alpha\varepsilon$, comparé au terme de même rang, α, de $\Sigma\alpha$, donne le rapport ε; et $\Sigma\alpha\varepsilon$ a, par suite, avec $\Sigma\alpha$, toujours en vertu du théorème cité, un rapport intermédiaire entre le plus petit et le plus grand des ε, c'est-à-dire nul à la limite. Donc, il vient bien $\lim\frac{\Sigma(\beta - \alpha)}{\Sigma\alpha} = 0$, ou $\frac{\lim\Sigma\beta - \lim\Sigma\alpha}{\lim\Sigma\alpha} = 0$ et, par suite, $\lim\Sigma\beta = \lim\Sigma\alpha$.

Ainsi, dans les deux sortes de calculs, tout infiniment petit, α, peut être remplacé par un autre, β, qui a avec lui un rapport tendant vers l'unité, ou dont l'expression est $\beta = \alpha(1 + \varepsilon)$ si ε désigne une quantité évanouissante. Or, comme cette égalité revient à écrire $\beta - \alpha = \alpha\varepsilon$, la différence, $\beta - \alpha$, des deux infiniment petits n'est que la fraction infiniment petite ε (ou la $\varepsilon^{\text{ième}}$ partie) de l'un d'eux, α; et dire que deux infiniment petits ont entre eux un rapport tendant vers l'unité, c'est la même chose que de dire qu'ils diffèrent l'un de l'autre d'une partie infiniment petite de leur valeur. Par conséquent, le principe général s'énonce encore de cette autre manière :

On peut, dans les calculs, substituer un infiniment petit à un autre, pourvu qu'il ne diffère de celui-ci qu'infiniment peu par rapport à lui-même.

27. — Des infiniment petits de divers ordres.

Nous sommes donc conduit à considérer des infiniment petits qui sont infiniment plus petits que d'autres, et, à ce propos, il y a lieu de parler de ce qu'on appelle les *infiniment petits des divers ordres*. Cela nous fera, d'ailleurs, mieux comprendre l'utilité du grand principe que nous venons de démontrer.

Dans chaque question où il y a des infiniment petits à considérer, l'un d'eux, que nous désignerons par α, sert de terme de comparaison à tous les autres : on l'appelle *l'infiniment petit principal*. Soit β un autre infiniment petit paraissant dans la question. Le plus souvent, cet infiniment petit se trouve *comparable* à une puissance déterminée, α^n, de l'infiniment petit principal, c'est-à-dire qu'il y a moyen de choisir l'exposant n, de manière que, α tendant vers zéro, le rapport $\frac{\beta}{\alpha^n}$ *reste* un nombre *fini*, ne devenant pas nul ni ne grandissant sans limite (¹). Si l'on désigne par K ce nombre, on a donc $\beta = K\alpha^n$; et l'on dit alors que l'infiniment petit β est du $n^{ième}$ *ordre de petitesse*.

Parfois, cependant, la manière dont varie β en fonction de α, dans

---

(¹) Il est bon d'observer que le mot *fini* devra s'entendre, suivant le sens général de la phrase, de deux manières différentes : tantôt, comme ici, il désignera ce qui n'est ni infiniment grand, ni même infiniment petit; tantôt sa signification sera plus large ou moins exclusive, et il s'appliquera à *tout* ce qui n'est pas infiniment grand. C'est dans ce dernier sens qu'il se trouve spécialement le synonyme de *non-infini* : car l'infiniment petit, considéré dans sa valeur *zéro*, non dans l'infinité des degrés décroissants que parcourt pour l'atteindre la quantité continue indéfiniment divisible, n'est pas infini, mais nul; et il comporte, à cet égard, une connaissance aussi nette, aussi précise que tout autre état déterminé de la grandeur, contrairement à ce qui nous arrive pour l'infini (limite *extérieure* de la quantité grandissante), dont la vue distincte nous échappe, ou que, pour ainsi dire, nous ne pouvons pas regarder *en face*, quoique l'idée *indirecte* que nous en avons soit, comme disait Pascal, absolument indispensable au géomètre.

Quand on dit, non plus d'une quantité, mais de la *forme* ou expression analytique d'une fonction, qu'elle est *finie*, on entend par là qu'un nombre limité de termes, ou de facteurs, etc., algébriques ou même transcendants, mais d'une nature *réputée connue*, suffit pour représenter cette fonction : bref, qu'elle comporte une expression exacte : ce qui n'arriverait pas si elle était seulement une *limite* d'expressions de plus en plus complexes, comme sont souvent une série d'une infinité de termes, un produit d'une infinité de facteurs, ou encore une *fraction continue*, c'est-à-dire une fraction dont le dénominateur comprend une partie fractionnaire en enveloppant elle-même une autre à son dénominateur, et ainsi de suite à l'infini.

le voisinage de la valeur zéro, est plus compliquée que celles qu'expriment les diverses puissances de x, même à exposants fractionnaires; et il n'y a pas lieu de parler alors de l'ordre de cet infiniment petit β. Mais on dira pourtant, sans spécifier davantage, que l'infiniment petit dont il s'agit est d'un ordre supérieur au $n^{\text{ième}}$ si son rapport à x^n tend vers zéro, et d'un ordre inférieur au $n^{\text{ième}}$ si, au contraire, son rapport à x^n grandit indéfiniment lorsque x s'évanouit.

Admettons que nous ayons un infiniment petit δ de la forme

$$\delta = \mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m+p} + \mathrm{C}x^{m+q} + \ldots,$$

où $m, m+p, m+q, \ldots$ désignent des exposants de plus en plus grands. Je dis qu'on pourra simplement remplacer cet infiniment petit par son premier terme ou, autrement dit, *réduire son expression à la partie de l'ordre de petitesse le moins élevé,* et écrire $\delta = \mathrm{A}x^m$, en négligeant tous les termes qui suivent. En effet, ceux-ci sont infiniment petits en comparaison du terme ainsi conservé $\mathrm{A}x^m$; car, si l'on divise l'égalité par $\mathrm{A}x^m$, il vient $\frac{\delta}{\mathrm{A}x^m} = 1 + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}x^p + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}x^q + \ldots$. Or, comme x tend vers zéro, le second membre est de la forme $1+\varepsilon$ et, en substituant $\mathrm{A}x^m$ à δ, on ne fait que remplacer un infiniment petit par un autre dont le rapport avec lui tend vers l'unité.

Le principe démontré permet donc de supprimer de la formule tous les termes, excepté le premier. Celui-ci, étant infiniment plus grand que les autres, les *masque,* en quelque sorte, complètement et, tant qu'il subsiste, ne leur permet de produire un effet sensible dans aucun résultat. L'erreur commise en ne les mettant pas en ligne de compte deviendra rigoureusement nulle quand on passera à la limite.

28. — Unité du développement de toute fonction suivant les puissances ascendantes de la variable.

Il résulte de ce qui précède, entre autres applications dont ce cours fera connaître un grand nombre, qu'*une fonction ne peut, dans le voisinage d'une valeur nulle de la variable, admettre plusieurs développements en série procédant suivant les puissances, à exposants positifs, de cette variable.*

Soit, en effet, deux séries *distinctes,* de la forme

$$\mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m+p} + \mathrm{C}x^{m+q} + \ldots.$$

Leur différence est encore, évidemment, une troisième série de la même forme, avec des coefficients qui ne sont pas tous nuls. Si donc

on y fait tendre x vers zéro, ses termes s'effaceront devant le premier d'entre eux, de l'ordre de petitesse le moins élevé ; et celui-ci ne pouvant, de la sorte, se réduire avec aucun autre, rendra l'expression tout entière différente de zéro. Ainsi, les deux développements proposés, s'ils sont égaux pour $x = 0$, se séparent nécessairement l'un de l'autre dès que la variable x n'est plus nulle, et ils expriment deux fonctions différentes. Autrement dit, deux séries convergentes procédant suivant les puissances ascendantes de la variable ne sauraient être égales pour toutes les très petites valeurs de celle-ci, sans être identiques.

Quand il s'agit de deux polynômes entiers et finis en x, leur identité n'exige même pas, pour pouvoir être conclue avec certitude, qu'on les donne égaux pour toutes les très petites valeurs de la variable ; car, en attribuant à tous les deux le degré, n par exemple, du plus élevé, il suffit qu'ils soient égaux chacun à chacun quand x reçoit n valeurs distinctes, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour que leur différence, polynôme du degré n, égale elle-même, comme on sait, le produit de $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ par le coefficient de son terme du degré n, et ne puisse plus, par conséquent, s'annuler pour une $(n+1)^{\text{ième}}$ valeur, x_0, de x, à moins que ce coefficient ne se réduise à zéro, ce qui rend alors identiques les deux polynômes proposés. Et l'on pouvait le prévoir, en observant que, si l'on assujettit un polynôme du degré n, $f(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Dx^n$, à prendre, pour $n+1$ valeurs données $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x, $n+1$ valeurs assignées ellesmêmes $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$, cela fait en tout $n+1$ équations du premier degré

$$A + Bx_0 + Cx_0^2 + \ldots + Dx_0^n = f_0, \quad A + Bx_1 + Cx_1^2 + \ldots + Dx_1^n = f_1, \ldots,$$

que l'on pose entre les $n+1$ coefficients inconnus A, B, C, ..., D du polynôme. Il est donc tout naturel que ces coefficients soient, par le fait même, déterminés, ou qu'il n'y ait qu'un seul polynôme répondant à la question. Or ce raisonnement (en ajoutant, au besoin, quelques données de plus pour compléter la détermination, dans le cas d'équations à solutions multiples) s'appliquerait à toute fonction algébrique ou transcendante dont la formule ne contiendrait qu'un nombre fini de paramètres comme A, B, C, ... Aussi peut-on, par exemple, d'une portion infiniment petite de courbe ayant une équation de forme finie, déduire, en général, la courbe tout entière. La démonstration précédente montre que cela est même vrai de certaines séries, c'est-à-dire de fonctions qui comportent dans leur expression une infinité de paramètres, mais astreints, pour la convergence de la série, à ne jouer

qu'un rôle de plus en plus effacé quand leur numéro d'ordre s'élève et, par conséquent, à ne pas grandir trop vite de l'un à l'autre.

29. — Des infiniment grands de divers ordres.

Par opposition aux infiniment petits de divers ordres, il y a quelquefois lieu de considérer, parmi les quantités qui croissent sans limite en valeur absolue, des *infinis* ou infiniment grands de divers ordres. Dans les questions où cela arrive, les quantités qui grandissent indéfiniment dépendent de l'une d'elles, dite l'*infiniment grand principal*, et que représente, par exemple, une expression comme $\frac{1}{\alpha}$, où α tend vers zéro. Or il arrive fréquemment que toute autre quantité de la question qui croît indéfiniment est comparable à une certaine puissance, $\frac{1}{\alpha^n}$, de l'infiniment grand principal. Soit β l'une de ces quantités; et supposons que le rapport de β à $\frac{1}{\alpha^n}$ égale ainsi un nombre, K, *fini*, c'est-à-dire ne devenant, à la limite, ni infini ni même nul. On dit alors que l'infiniment grand β est du $n^{\text{ième}}$ *ordre de grandeur*. Mais, si son mode de variation ne ressemblait pas assez à celui d'une puissance de $\frac{1}{\alpha}$ (même à exposant fractionnaire) pour que l'ordre n pût être déterminé, on continuerait néanmoins à dire l'infini β d'un ordre soit supérieur, soit inférieur, par exemple, au $m^{\text{ième}}$, suivant que le rapport de β à $\frac{1}{\alpha^m}$ grandirait indéfiniment ou tendrait vers zéro.

Un principe analogue au précédent sur les infiniment petits s'appliquera dans les calculs de résultats limites où interviendraient des quantités infiniment grandes, c'est-à-dire indéfiniment croissantes. Toutes les fois qu'une quantité sera composée de divers termes, d'ordres de grandeur différents, on pourra la réduire au terme de l'ordre de grandeur le plus élevé. Si l'on a, par exemple, l'expression

$$\delta = \frac{A}{\alpha^m} + \frac{B}{\alpha^{m-p}} + \frac{C}{\alpha^{m-q}} + \dots,$$

où m, $m-p$, $m-q$, ... sont des exposants décroissants, il sera permis de supprimer tous les termes, excepté le premier. En effet, l'expression proposée peut s'écrire

$$\delta = \frac{1}{\alpha^m}(A + B\alpha^p + C\alpha^q + \dots) = \frac{A}{\alpha^m}\left(1 + \frac{B}{A}\alpha^p + \frac{C}{A}\alpha^q + \dots\right).$$

Or, α tendant vers zéro, le dernier facteur est de la forme $1 + \varepsilon$, et l'on n'altérera l'expression que d'une fraction infiniment petite de sa valeur en supprimant tous les termes qui suivent le premier, c'est-à-dire qu'on n'introduira de la sorte, dans tout résultat *fini* dépendant des rapports de ces infiniment grands, qu'une erreur infiniment petite vis-à-vis du résultat lui-même et nulle, en conséquence, à la limite.

30. — Application des mêmes principes aux calculs d'approximation : quantités très petites des divers ordres ; approximations successives.

Le grand principe qui permet les simplifications des calculs d'infiniment petits ou d'infiniment grands peut donc, dans son esprit, se résumer en ces termes : *toute quantité est négligeable lorsqu'elle en a, devant elle, une autre incomparablement plus grande, à laquelle elle est ajoutée ou dont elle se trouve retranchée.* Et il est d'une exactitude rigoureuse dans ces calculs, puisque l'erreur entraînée par son application devient nulle, à la limite qu'on veut seule considérer. Mais il remplit, avec une exactitude très suffisante, un rôle non moins indispensable dans les calculs d'approximation qui constituent la presque totalité des sciences de la nature en ce qu'elles ont de plus précis.

On sait, en effet, que les meilleurs procédés d'expérience ne nous font pas connaître les nombres évaluant une chose réelle avec plus de trois ou quatre chiffres significatifs et, quelquefois, pas avec plus de deux. Par suite, des erreurs relatives de $\frac{1}{10000}$ et au-dessous, assez souvent même de $\frac{1}{1000}$, sont complètement inappréciables à l'observation, et l'on peut dès lors n'en pas tenir compte. Il suffira, par exemple, qu'une quantité vaille $\frac{1}{10000}$ ou, encore, $\frac{1}{1000}$, pour que son carré puisse être supprimé sans hésitation à côté de sa première puissance, dont il ne modifierait que des décimales éloignées échappant à nos mesures. On distinguera donc, dans les calculs pratiques relatifs à de telles quantités, non pas, précisément, des infiniment petits de divers ordres, mais des *quantités très petites de divers ordres*, égales respectivement aux produits de nombres comparables à l'unité par les puissances successives de la *principale* quantité très petite de la question ; et l'on négligera, au moins provisoirement, dans chaque expression, les termes qui se trouveront à côté d'autres d'un ordre de petitesse moins élevé.

Or les cas où il se présente, de la sorte, de petites quantités, sont extrêmement fréquents, soit parce que les phénomènes les plus nombreux, tant dans le monde où nous vivons (compatible avec notre

organisation délicate) que dans nos appareils et mécanismes réguliers, consistent en d'assez faibles écarts de part et d'autres de certains états d'équilibre ou de certaines manières d'être uniformes, soit encore parce que cette petitesse même des variables d'une question rend souvent accessibles à nos recherches, par les simplifications approximatives qu'elle entraîne, des lois inextricables autrement, et communique ainsi aux phénomènes qui la présentent un intérêt tout spécial. Il y aura donc souvent lieu d'appliquer, dans les calculs d'approximation, le même principe que dans ceux d'infiniment petits, en négligeant des quantités très petites par rapport à d'autres auxquelles elles seraient ajoutées ou dont elles seraient retranchées : celles-ci les masquent dans les résultats et rendent imperceptibles les erreurs causées par leur suppression. Ce n'est que lorsque, dans une somme algébrique, les quantités les plus grandes viennent à s'entre-détruire exactement, que les quantités moins grandes prennent de l'importance : car elles passent alors au premier rang; et ce sont elles qui composent le résultat, s'il y a lieu, dans ces conditions, d'en chercher un.

Mais ce n'est pas seulement quand certaines quantités sont, comme on dit, complètement *insensibles* par rapport à d'autres, qu'on est conduit à les négliger. La réalité se trouve, d'ordinaire, si complexe et, par suite, les relations mathématiques qui l'expriment, quand nous parvenons à les former, sont si *rebelles* (suivant un mot de Lagrange), que nous ne réussirions, pour ainsi dire, jamais à en dégager les inconnues, si nous ne tolérions dans une première étude des erreurs parfois très appréciables, en nous contentant d'y prendre une certaine idée des quantités en vue, *données* ou *résultats*. Pour cela, nous supprimons des équations tout ce qui n'est pas très influent, de manière à former, à leur place, des relations assez simples pour qu'il nous soit possible d'en déduire les quantités ou fonctions inconnues. Et les valeurs de celles-ci, déterminées de cette manière imparfaite, sont généralement voisines des vraies, à cause du principe de la continuité relative des choses, qui exige la graduelle variation des résultats quand les données, ou même la nature des opérations faites, changent peu.

Or, une fois que l'on a ces *premières* expressions approchées des quantités ou des fonctions inconnues, la question se transforme; car on peut les substituer dans les termes très petits négligés d'abord, qui dépendent de ces quantités ou de ces fonctions. Alors ceux-ci deviennent eux-mêmes connus, à fort peu près; et le problème, traité dans la nouvelle supposition qu'il n'y ait d'inconnus que les termes

principaux, reste généralement abordable toutes les fois qu'on avait pu le résoudre en n'y gardant que ces termes mêmes. On peut donc obtenir pour les quantités ou fonctions demandées des expressions plus exactes que les premières : elles constituent ce qu'on appelle la *deuxième approximation*. Ces expressions meilleures, portées à leur tour dans les petits termes négligés en premier lieu, les feront encore mieux connaître, ce qui permettra de procéder à une *troisième* approximation; et ainsi de suite indéfiniment, ou du moins jusqu'à certaines limites dépendant de la nature de la question. Il suffit ordinairement que la seconde approximation soit moins inexacte que la première, pour qu'on puisse regarder celle-ci comme légitime, en tant que point de départ.

Cette marche, seule praticable bien souvent, qui procède par *corrections* ou retouches de plus en plus délicates, opérées sur un premier résultat assez grossièrement approché, s'appelle *méthode des approximations successives*. Déjà, en Arithmétique, on en voit comme une ébauche dans la division et dans l'extraction des racines, où le chiffre exprimant les unités les plus élevées du résultat est le seul qui soit d'abord déterminable. Mais l'Algèbre en offre une belle application dans le calcul de plus en plus exact des racines d'un équation $f(x) = 0$, par le procédé, qu'on appelait autrefois en Arithmétique *méthode de double fausse position* (c'est-à-dire *supposition*), où, après avoir obtenu, en essayant si deux nombres a, b ne seraient pas la racine cherchée, deux valeurs $f(a)$, $f(b)$, du premier membre $f(x)$, peu différentes de zéro et (autant que possible) de signes contraires, on suppose, dans leur voisinage, en vertu du principe de graduelle variation, les accroissements $f(x) - f(a)$ de la fonction sensiblement proportionnels à ceux, $x - a$, de la variable : on peut donc écrire, au moyen des données fournies par les suppositions $x = a$, $x = b$, la proportion presque exacte

$$\frac{f(x) - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

et prendre par suite, sauf contrôle ultérieur, pour la racine cherchée annulant $f(x)$, la valeur

$$x = a - \frac{f(a)}{f(a) - f(b)}(b - a).$$

31. — Division de l'Analyse infinitésimale en Calcul différentiel et Calcul intégral.

Puisque les infiniment petits peuvent être introduits dans les cal-

culs de deux manières conduisant à des résultats finis et déterminés, mais infiniment variés suivant les cas, l'Analyse infinitésimale comprendra deux grandes Parties, consacrées spécialement, l'une, à la première de ces catégories d'opérations, qui consiste à calculer des rapports d'infiniment petits, l'autre, à la seconde, qui consiste à calculer une somme d'une infinité d'infiniment petits.

Dans la première Partie, on attribuera aux variables indépendantes des accroissements infiniment petits, positifs ou négatifs, et l'on verra quels rapports ont, avec ces accroissements, les accroissements que recevront par le fait même les fonctions. On y évaluera donc des rapports de *différences* infiniment petites. Aussi cette Partie s'appelle-t-elle : *Calcul différentiel.*

Dans la seconde, on supposera, au contraire, donnée une formule qui exprime les accroissements infiniment petits successifs d'une fonction, et l'on essayera de faire la somme de ceux-ci pour remonter de la différence infiniment petite à la fonction elle-même. On y réunira donc, en quelque sorte, les éléments infiniment petits d'une quantité pour la reconstituer dans sa valeur *intégrale* ou totale. De là le nom de *Calcul intégral,* qu'on donne à cette seconde branche de l'Analyse infinitésimale.

32. — CALCUL DIFFÉRENTIEL : Différentielles d'une variable et d'une fonction.

Soit $y = f(x)$ une fonction quelconque d'une variable x. Nous avons vu dans l'avant-dernière Leçon (n° 10, p. 36) que, si x et y reçoivent deux très faibles accroissements *simultanés* Δx et Δy, on aura la formule

$$\Delta y = [f'(x) + \varepsilon]\Delta x,$$

ε désignant une petite quantité, fonction de x et de Δx, qui tendrait vers zéro avec Δx. Cette formule n'exprime, au fond, que le fait de l'existence de la dérivée y' ou $f'(x)$; car il suffit de la mettre sous la forme $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$, pour y voir, à cause du sens de quantité *évanouissante* attribué à ε, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ s'approcher indéfiniment de la limite $f'(x)$ quand Δx s'approche de zéro. Or, après avoir ainsi écrit

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x,$$

admettons que cette expression de Δy soit évaluée pour servir à des calculs quelconques, plus ou moins compliqués, mais effectués uni-

quement en vue de chercher les limites vers lesquelles tendront leurs résultats lorsque toutes les petites différences comme Δx ou Δy s'évanouiront. Alors Δx et Δy deviendront ce que nous avons nommé des *infiniment* petits, c'est-à-dire de très petites quantités, actuellement *finies*, soumises, par conséquent, à toutes les lois ordinaires du calcul, mais dont les combinaisons ne devront être utilisées qu'au moment où leur propre valeur absolue atteindra, *en s'annulant*, l'extrême degré de la petitesse. Aussi ces accroissements Δx et Δy, qui s'appelaient jusqu'à présent des *différences finies*, prennent-ils un autre nom, diminutif de celui-là, et que leur a donné Leibnitz : ils s'appellent des *différentielles*. En même temps, au lieu de les représenter par la lettre Δ, on les représente, encore d'après Leibnitz, par la lettre *d*. Comme d'ailleurs $f'(x)$ se trouve être en général fini, je veux dire différent de zéro, et que ε tend vers zéro, le terme $\varepsilon\Delta x$ est, dans l'expression précédente de Δy, d'un ordre de petitesse supérieur à celui de $f'(x)\,\Delta x$. On peut donc, en vertu du grand principe permettant la simplification des calculs d'infiniment petits, l'effacer de l'expression de Δy; car l'erreur relative entraînée par sa suppression s'annule à la limite qu'on veut seule considérer. Ainsi, *par le fait même que l'on substitue des d aux* Δ, on a le droit de réduire la formule de Δy à

$$dy = f'(x)dx,$$

relation signifiant que *la différentielle d'une fonction est égale au produit de la dérivée de cette fonction par la différentielle de la variable*.

En d'autres termes, dès qu'on remplace les mots *différence finie* par le mot *différentielle*, ou la caractéristique Δ par la caractéristique *d*, on exprime l'intention bien arrêtée de n'évaluer que des *résultats limites*, c'est-à-dire de ne faire servir l'expression de dy à divers calculs que pour annuler finalement, dans les résultats, toutes les différentielles telles que dx et dy; et voilà ce qui donne le droit de débarrasser les formules, dès le début, des termes qui n'influeraient plus sur ces résultats au seul instant pour lequel on veuille les connaître.

Une différentielle ne se distingue donc pas actuellement, en elle-même ou, comme on dit, *objectivement*, d'une différence finie très petite; elle ne s'en distingue que *subjectivement*, c'est-à-dire dans notre esprit, par l'*intention* où nous sommes de la faire tendre vers zéro et de ne considérer que les limites vers lesquelles tendront alors les résultats des calculs. L'idée qu'a eue Leibnitz de faire figurer une

pareille intention dans les formules est aussi simple qu'admirable, puisqu'elle permet d'y opérer des suppressions sans rien sacrifier de leur rigueur.

Disons un mot maintenant sur le cas exceptionnel où, pour la valeur x considérée, la dérivée $f'(x)$ serait nulle. Alors ε ne disparaîtrait plus à côté de $f'(x)$ et l'on n'aurait pas, d'une manière absolue, le droit d'écrire $dy = f'(x)\,dx$, c'est-à-dire $dy = 0 \times dx = 0$. Cependant, on continue à poser, même pour ce cas, $dy = f'(x)\,dx$, parce que, sauf dans des circonstances très rares, l'on n'a à comparer une différentielle dy de fonction qu'à des différentielles comme celle de sa variable, c'est-à-dire qu'à des quantités de l'ordre même de petitesse de dx : or un rapport, tel que $\frac{dy}{dx}$, réduit alors à ε ou à une quantité évanouissante analogue, s'annule à la limite et n'y serait par conséquent pas faussé en prenant simplement $dy = 0$. On écrira donc, même dans ce cas, $dy = f'(x)\,dx$, mais *sous la réserve indiquée*, de ne pas comparer dy à des quantités d'un ordre de petitesse supérieur à celui de dx.

33. — Notation leibnitzienne des dérivées. Différentiation des fonctions simples.

La formule $dy = f'(x)\,dx$ donne $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, relation qu'on pourrait aussi regarder comme immédiate, ou comme exprimant, non moins bien et même mieux que la précédente $\Delta y = [f'(x) + \varepsilon]\,\Delta x$, le fait capital de l'existence d'une dérivée. Il suffit, en effet, de voir écrite la fraction $\frac{dy}{dx}$, pour y lire deux choses :

1° Qu'il est question du rapport des deux accroissements *simultanés* très petits, dy et dx, d'une fonction et d'une variable;

2° Que, de plus, à cause de l'intention traduite par les signes d, c'est non le rapport lui-même, dans son état actuel, que l'on considère, mais uniquement *sa valeur limite* pour le moment où dx et dy s'annuleront.

On peut donc regarder *le quotient de la différentielle de la fonction par celle de la variable comme étant la définition même de la dérivée.* Et cette notation de Leibnitz, $\frac{dy}{dx}$, pour représenter la dérivée, a, comme on voit, sur celle de Newton ou de Lagrange, l'avantage d'être parlante ou intuitive, d'exprimer complètement tout ce qu'est la dérivée. Par contre, la notation de Newton, y', est beaucoup plus con-

cise, et elle garde encore cette qualité quand, pour la rendre plus claire, on y fait figurer la variable sous forme d'indice, en écrivant, par exemple, y'_x. Aussi se sert-on concurremment des deux notations, et l'on adopte, dans chaque cas, celle qu'on juge y être la plus commode.

Il est évident que, chercher la différentielle d'une fonction ou sa dérivée, sont deux opérations équivalentes, puisque la deuxième de ces expressions n'est que la première divisée par dx. Ces opérations, mais surtout la première, s'appellent la *différentiation* de la fonction : ainsi, *différentier* la fonction, c'est effectuer l'une quelconque des deux.

Les calculs de dérivées opérés dans les deux dernières Leçons conduisent donc, pour les fonctions les plus simples, à de véritables règles de différentiation, parmi lesquelles il me suffira d'énoncer les suivantes :

1° *La différentielle de la somme ou de la différence de plusieurs quantités s'obtient en faisant la somme ou la différence des différentielles de ces quantités;*

2° *La différentielle du produit d'un facteur constant et d'un facteur variable vaut le produit, par le facteur constant, de la différentielle du facteur variable;*

3° *La différentielle de tout produit est la somme des termes qu'on obtient en multipliant la différentielle de chacun des facteurs par le produit des autres facteurs;*

4° *La différentielle d'un quotient se forme en divisant par le carré du diviseur l'excédent du produit de ce diviseur par la différentielle du dividende sur le produit du dividende par la différentielle du même diviseur; etc.*

31. — Différentiation d'une fonction de fonction.

Quand nous avons démontré la relation $dy = f'(x)\,dx$, x était considéré comme une variable quelconque dont y dépendait, et non pas, explicitement, comme une variable indépendante. Donc la formule est générale et s'appliquerait alors même que x serait une fonction de la véritable variable indépendante, appelée, par exemple, t. Or, en divisant $dy = f'(x)\,dx$ par dt, il vient

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\,\frac{dx}{dt}:$$

relation vraie même dans le cas exceptionnel où la dérivée $f'(x)$ se-

rait zéro et devrait y être remplacée, comme on l'a vu, par ε; car, à la limite considérée, ε ne s'annulerait pas moins que $f'(x)$.

Ainsi, la dérivée de y, par rapport à la variable indépendante t, est le produit de $f'(x)$ par la dérivée de x; et l'on peut énoncer le principe suivant :

La dérivée d'une fonction de fonction se déduit de ce qu'elle serait si la fonction dont elle dépend était la variable indépendante, en le multipliant par la dérivée de cette fonction.

Mais celle-ci, x, peut elle-même n'être pas exprimée immédiatement au moyen de t. C'est ce qui arrive quand elle n'en dépend que par l'intermédiaire d'une autre variable, u. Supposons donc qu'on ait $x = \varphi(u)$ et enfin, pour ne pas multiplier outre mesure les variables intermédiaires, $u = \psi(t)$. Les relations $y = f(x)$, $x = \varphi(u)$, $u = \psi(t)$ donneront successivement

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dx}{dt} = \varphi'(u)\frac{du}{dt}, \qquad \frac{du}{dt} = \psi'(t);$$

et il viendra, par la substitution de chacun de ces résultats dans le précédent,

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\varphi'(u)\psi'(t).$$

Ainsi, *lorsqu'une quantité dépend d'une fonction qui est elle-même fonction de fonction, sa dérivée s'obtient en multipliant les unes par les autres les dérivées de toutes les fonctions entrant dans son expression, dérivées prises, pour chaque variable, par rapport à la variable suivante, dont elle dépend immédiatement.*

Il importe de savoir effectuer ces différentiations sans même avoir besoin de donner un nom spécial, comme x, u, etc., aux variables intermédiaires, mais en laissant à chacune d'elles son expression détaillée. On conçoit, en effet, que, pour représenter, comme c'est nécessaire, une multitude de modes de variation différents offerts par les quantités, au moyen des fonctions simples, en petit nombre, étudiées dans les deux dernières Leçons, il faille recourir à bien des combinaisons plus ou moins complexes de ces fonctions simples, c'est-à-dire, parfois, jusqu'à de vrais enchaînements de fonctions de fonction.

En voici un exemple, que j'extrais d'un problème de Mécanique pratique [1]. Soit

$$z = \sin\left(\frac{k}{2}\log\frac{l+x}{l-x}\right),$$

---

[1] Problème de la flexion d'une barre élastique, horizontale et de faible masse, appuyée à ses deux bouts, par une charge qui vient à passer sur elle en roulant

où k et l désignent deux constantes. En regardant d'abord $\frac{k}{2}\log\frac{l+x}{l-x}$, puis $\log\frac{l+x}{l-x}$, puis $\frac{l+x}{l-x}$ et enfin $l+x$, $l-x$ comme tout autant de variables intermédiaires entre z et x, on aura successivement

$$dz = \cos\left(\frac{k}{2}\log\frac{l+x}{l-x}\right) d\left(\frac{k}{2}\log\frac{l+x}{l-x}\right),$$

$$d\left(\frac{k}{2}\log\frac{l+x}{l-x}\right) = \frac{k}{2}\, d\log\frac{l+x}{l-x},$$

$$d\log\frac{l+x}{l-x} = \frac{l-x}{l+x}\, d\,\frac{l+x}{l-x},$$

$$d\,\frac{l+x}{l-x} = \frac{(l-x)\,d(l+x) - (l+x)\,d(l-x)}{(l-x)^2},$$

$$d(l+x) = dx, \qquad d(l-x) = -\,dx,$$

et, par des substitutions qu'un peu d'habitude fait opérer en écrivant même la première formule, suivies d'une division par dx,

$$\frac{dz}{dx} \quad \text{ou} \quad z' = \left[\cos\left(\frac{k}{2}\log\frac{l+x}{l-x}\right)\right]\frac{k}{2}\,\frac{l-x}{l+x}\,\frac{2l}{(l-x)^2}$$

$$= \frac{kl}{l^2-x^2}\cos\left(\frac{k}{2}\log\frac{l+x}{l-x}\right).$$

---

avec une vitesse constante depuis une de ses extrémités jusqu'à l'autre (Voir un volume intitulé *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, etc., p. 569). La fonction que j'appelle ici z entre dans l'expression du petit déplacement vertical de la charge roulante.

CINQUIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS COMPOSÉES ET DES FONCTIONS IMPLICITES. *SUPÉRIORITÉ DE CERTAINES ÉQUATIONS IMPLICITES SUR LES ÉQUATIONS EXPLICITES POUR EXPRIMER LES COURBES ET LES SURFACES. PLANS TANGENTS. *PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS DU PREMIER ORDRE DES FONCTIONS DE POINT.

---

35. — Différentiation des fonctions composées.

Passons maintenant au cas où la fonction proposée y dépend de x par l'intermédiaire de plusieurs fonctions u, v, w de cette variable x : autrement dit, supposons que y soit une certaine *fonction composée* $f(u, v, w)$. Alors, à côté de l'inconvénient d'avoir à considérer plusieurs variables u, v, w, se présente l'avantage de pouvoir obtenir l'accroissement effectif Δy de la fonction, pour un changement donné Δx de la variable indépendante, en ne faisant varier u, v, w que l'une après l'autre, quoique, dans la réalité, u, v, w reçoivent toutes à la fois leurs accroissements $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ simultanés à Δx. On peut faire passer, en effet, la fonction f, successivement, par les états bien déterminés $f(u, v, w)$, $f(u + \Delta u, v, w)$, $f(u + \Delta u, v + \Delta v, w)$, $f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w)$, dont chacun se distingue du précédent en ce qu'une variable de plus y a changé. Comme le premier et le dernier expriment les deux valeurs y et $y + \Delta y$ de la fonction proposée de x, la différence Δy égalera la somme des accroissements partiels éprouvés par la fonction f lors du passage de chacun de ces états au suivant.

Le premier accroissement partiel, $f(u + \Delta u, v, w) - f(u, v, w)$, s'appelle *la différence, par rapport à u*, de la fonction f, et s'écrit $\Delta_u f(u, v, w)$, l'indice u y signifiant que la variable u varie seule. Son rapport à Δu tendra évidemment, si Δu s'évanouit, vers la dérivée de la fonction, obtenue en n'y regardant comme variable que u, puisque v, w y jouent le rôle de constantes. Cette dérivée dépendra bien, en général, de v et w, qui, suivant leurs valeurs actuelles, n'influeront pas de même sur la manière dont f variera présentement avec

u; mais elle se calculera par les règles ordinaires de différentiation des fonctions d'une seule variable. On l'appelle la *dérivée partielle* de la fonction *par rapport à* u et on la représente par $f'_u(u, v, w)$, ou, d'après la notation de Leibnitz, par $\frac{df}{du}$, le dénominateur du indiquant assez, dans ce dernier cas, que c'est la variable u qui change. Si plus de précision était réputé nécessaire, un indice, au numérateur, désignerait la variable dont le changement aurait fait naître l'accroissement considéré df de la fonction, et l'on écrirait, par conséquent, celui-ci, $d_u f$; mais habituellement on s'en dispense. Le rapport de $\Delta_u f$ à Δu, ayant ainsi pour limite $\frac{df}{du}$ ou $f'_u(u, v, w)$, peut s'exprimer par $\frac{df}{du} + \varepsilon$, ou par $f'_u(u, v, w) + \varepsilon$, si ε désigne une fonction de u, v, w et Δu s'évanouissant en même temps que Δu. Il vient donc

$$(1) \qquad f(u + \Delta u, v, w) - f(u, v, w) = [f'_u(u, v, w) + \varepsilon]\,\Delta u.$$

L'accroissement partiel suivant $f(u + \Delta u, v + \Delta v, w) - f(u + \Delta u, v, w)$, qu'on peut écrire $\Delta_v f(u + \Delta u, v, w)$, aurait de même pour son rapport limite à Δv, supposé que Δv tendît vers zéro, la *dérivée* de la fonction f *par rapport à* v, c'est-à-dire obtenue en considérant les variables autres que v comme des constantes. Cette dérivée s'écrira d'ailleurs $f'_v(u + \Delta u, v, w)$ ou $\frac{df(u + \Delta u, v, w)}{dv}$, et non pas simplement $f'_v(u, v, w)$ ou $\frac{df}{dv}$, puisque la première variable, qui s'y comporte comme une constante, a maintenant la valeur $u + \Delta u$, circonstance à remarquer. Mais, comme nous admettons, en général, la continuité des fonctions, $f'_v(u + \Delta u, v, w)$ ne diffère de $f'_v(u, v, w)$ que par une quantité s'annulant en même temps que Δu; d'où il suit que la différence entre $\frac{\Delta_v f(u + \Delta u, v, w)}{\Delta v}$ et $f'_v(u, v, w)$ est une certaine fonction ε_1 de u, v, w, Δu et Δv qui tend vers zéro quand Δu et Δv y tendent à la fois. On a donc

$$(2) \qquad f(u + \Delta u, v + \Delta v, w) - f(u + \Delta u, v, w) = [f'_v(u, v, w) + \varepsilon_1]\,\Delta v.$$

Enfin, le dernier accroissement partiel,

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u + \Delta u, v + \Delta v, w),$$

aura son rapport à Δw exprimé à la limite, si Δw s'évanouit, par la *dérivée partielle en* w, $f'_w(u + \Delta u, v + \Delta v, w)$, réductible à $f'_w(u, v, w)$

ou à $\frac{df}{dw}$, avec une erreur aussi petite que l'on veut, quand les différences Δu et Δv deviennent, toutes les deux à la fois, suffisamment voisines de zéro. Et, par conséquent, en appelant ε_2 une fonction de u, v, w, Δu, Δv et Δw, qui s'annule avec Δu, Δv et Δw à la fois, on peut écrire

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u+\Delta u, v+\Delta v, w) \\ & \qquad = [f'_w(u, v, w) + \varepsilon_2]\,\Delta w. \end{aligned} \right.$$

Donc, l'accroissement demandé Δy, somme des précédents (1), (2), (3), aura l'expression

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta y = {} & [f'_u(u, v, w) + \varepsilon]\,\Delta u + [f'_v(u, v, w) + \varepsilon_1]\,\Delta v \\ & + [f'_w(u, v, w) + \varepsilon_2]\,\Delta w. \end{aligned} \right.$$

Concevons actuellement que Δx et, par suite, Δu, Δv, Δw, Δy doivent tendre vers zéro et ne soient calculés qu'en vue d'obtenir des valeurs limites de rapports ou de sommes. Alors Δx, Δu, Δv, Δw, Δy deviennent les différentielles dx, du, dv, dw, dy, et ε, ε_1, ε_2, infiniment petits, disparaissent à côté des dérivées f'_u, f'_v, f'_w, généralement différentes de zéro. Même dans le cas exceptionnel où toutes ces dérivées partielles s'annuleraient pour les valeurs de u, v, w choisies, on n'aurait, le plus souvent, à comparer dy qu'à des différentielles de l'ordre de du, dv, dw, et la limite (nulle) d'un rapport évalué dans ces conditions s'obtiendrait en supprimant encore ε, ε_1, ε_2 de la formule (4). Employons d'ailleurs la notation leibnitzienne des dérivées concurremment avec l'autre, et il viendra

$$(5)\qquad dy = f'_u\,du + f'_v\,dv + f'_w\,dw = \frac{df}{du}\,du + \frac{df}{dv}\,dv + \frac{df}{dw}\,dw.$$

Enfin, divisant par dx, nous aurons

$$(6)\quad y' \text{ ou } \frac{dy}{dx} = f'_u u' + f'_v v' + f'_w w' = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{df}{dw}\frac{dw}{dx}.$$

Ainsi *la différentielle et la dérivée d'une fonction composée égalent les deux sommes respectives des produits qu'on obtient, en multipliant soit la différentielle, soit la dérivée de chacune des fonctions dont elle dépend immédiatement, par la dérivée partielle correspondante de la fonction composée elle-même.*

Il arrive souvent que la variable indépendante x figure au nombre des propres variables u, v, w de la fonction composée. Celle-ci peut, par exemple, se réduire à $f(x, v, w)$, v et w continuant à être des fonctions

plus ou moins compliquées de x, mais u se réduisant à la fonction la plus simple possible, qui est x. Alors il faut éviter de confondre la dérivée purement partielle de f en x, obtenue sans faire varier v, ni w, avec le rapport limite cherché $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{df}{dx}$, qui est aussi une dérivée prise par rapport à x, mais une *dérivée complète*, obtenue en faisant changer tout ce qui dépend de x, savoir x, v et w. A cet effet, on représentera la dérivée complète par $\frac{d_c f}{dx}$, le symbole d_c exprimant une différentielle *complète*, et la notation $\frac{df}{dx}$ restera consacrée à la dérivée partielle $\frac{f(x+dx,\, v,\, w) - f(x,\, v,\, w)}{dx}$. On aura donc, par exemple, en vertu de (6),

$$\frac{d_c f(x, v, w)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dv} v' + \frac{df}{dw} w'. \tag{7}$$

36. — Emploi de l'expression approchée des petits accroissements d'une fonction dans les calculs d'approximation et dans les interpolations par parties proportionnelles.

On remarquera que la formule (4) a été établie, en définitive, pour des valeurs absolument arbitraires de u, v, w, Δu, Δv, Δw, et qu'elle exprime ainsi les accroissements positifs ou négatifs, Δf, d'une fonction continue $f(u, v, w)$ de variables en nombre quelconque u, v, w. Or elle peut encore être débarrassée de ses termes $\varepsilon \Delta u$, $\varepsilon_1 \Delta v$, $\varepsilon_2 \Delta w$, dans les calculs d'approximation où les accroissements Δu, Δv, Δw, sans être infiniment petits, restent assez faibles pour que ε, ε_1, ε_2 ne soient plus que des fractions insensibles ou, du moins, provisoirement négligeables, des dérivées partielles f'_u, f'_v, f'_w de la fonction. Alors il vient

$$\Delta f = (\text{sensiblement})\, f'_u \Delta u + f'_v \Delta v + f'_w \Delta w. \tag{8}$$

Donc, *quand les variables d'une fonction quelconque n'éprouvent que d'assez petits changements* Δu, Δv, ..., *à partir de certaines valeurs fixes* u, v, ..., *les changements correspondants de la fonction n'en dépendent à très peu près que linéairement, ou se décomposent, avec une erreur relative très faible, en termes dont chacun égale le produit d'une des petites variables* Δu, Δv, ..., *par un coefficient constant.*

Supposons qu'il s'agisse, par exemple, d'un système d'équations, de la forme $f(u, v, \ldots) = 0$, à résoudre, et qu'on soit parvenu, ne

serait-ce qu'à l'aide de tâtonnements multipliés, à des valeurs approchées u, v, ... des racines. Alors les véritables *inconnues* du problème sont désormais les petites *corrections* Δu, Δv, ... qu'il faudra faire subir à ces valeurs approchées u, v, ..., c'est-à-dire qui, ajoutées respectivement à u, v, ..., donneront les vraies racines $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, ..., ou annuleront rigoureusement les premiers membres, comme $f(u+\Delta u, v+\Delta v, \ldots)$, des équations. L'accroissement $\Delta f = f(u+\Delta u, v+\Delta v, \ldots) - f(u, v, \ldots)$, de la fonction f, aura donc la petite valeur $-f(u, v, \ldots)$, déjà connue par le calcul du premier membre $f(u, v, \ldots)$ effectué préalablement pour s'assurer que u, v, ... étaient des valeurs approchées. Or, d'autre part, cet accroissement Δf pourra, d'après (8), se mettre sous la forme $A\,\Delta u + B\,\Delta v + \ldots$, si l'on appelle A, B, ... soit les dérivées partielles de $f(u, v, \ldots)$ prises pour les valeurs approchées obtenues de u, v, ..., soit d'autres coefficients ne différant que fort peu de ces dérivées. Il vient donc, très sensiblement, pour tenir lieu de l'équation

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v, \ldots) = 0,$$

la relation

$$A\,\Delta u + B\,\Delta v + \ldots = -f(u, v, \ldots),$$

qui est *du premier degré* par rapport aux inconnues Δu, Δv, ... Comme il en sera de même des autres équations du problème, le système à résoudre, si compliqué qu'il fût d'abord, se trouvera abaissé au premier degré; et sa solution, obtenue sans difficulté par la méthode élémentaire connue, donnera des valeurs $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, ... beaucoup plus exactes que les premières u, v, ... En partant ensuite de ces nouvelles valeurs comme on l'a fait de u, v, ..., on en obtiendra de même d'autres bien plus approchées encore, supposé que ce soit nécessaire; et ainsi de suite.

Quant aux coefficients A, B, ..., on pourra les prendre égaux aux dérivées partielles de $f(u, v, \ldots)$, si celles-ci sont faciles à évaluer. Sinon, comme on aura fait antérieurement l'essai de plusieurs systèmes $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, ... de valeurs inconnues, distincts mais voisins de celui u, v, ... auquel on s'est arrêté à une première approximation, et que leur nombre aura été, en général, au moins égal à celui des inconnues, on profitera de ces essais, qui auront ainsi donné directement tout autant de valeurs *exactes* de Δf, pour former entre A, B, ... un pareil nombre d'équations de premier degré, de la forme

$$(\Delta u)A + (\Delta v)B + \ldots = \Delta f.$$

Seulement, leurs seconds membres connus Δf différeront relativement

quelque peu de ce qu'ils auraient été si on les avait calculés par la formule seulement approchée (8), c'est-à-dire en mettant dans les premiers membres, pour A, B, ..., les dérivées partielles exactes $f'_u(u, v, \ldots)$, $f'_v(u, v, \ldots)$, ... Donc, la résolution de ce système d'équations du premier degré conduira, pour les coefficients A, B, ..., à des valeurs parfaitement admissibles, très voisines de f'_u, f'_v, ... Cette méthode sera seule praticable dans certains cas, notamment quand on ne connaîtra les fonctions $f(u, v, \ldots)$ que sous la forme de séries convergentes, en donnant de divergentes par la différentiation; ce qui est possible, comme on a vu (p. 3*).

D'ailleurs, dans l'expression linéaire approchée de Δf, les coefficients A, B, ... déterminés de la sorte ne présentent, en général, aucun désavantage sur les dérivées exactes f'_u, f'_v, ..., mieux appropriées seulement au cas d'accroissements Δu, Δv, ... infiniment petits; et, souvent même, ils leur sont préférables. Cela arrive, par exemple, dans le cas d'une seule variable $u = x$: si l'on y appelle a et b les deux valeurs, assez voisines, entre lesquelles on fait varier x, le petit accroissement $f(x) - f(a)$, qu'il s'agit d'exprimer à fort peu près par $A(x - a)$, l'est généralement mieux en y déterminant A par l'équation $f(b) - f(a) = A(b - a)$, c'est-à-dire en prenant l'accroissement en question exact à la seconde limite $x = b$ tout comme à la première $x = a$, qu'en y posant $A = f'(a)$; ce qui le rendrait aussi approché que possible dans le voisinage de $x = a$, ou y ferait le rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ exact à cette limite, mais, par contre, de plus en plus inexact à mesure qu'on s'en éloignerait, c'est-à-dire aux moments mêmes où, dans l'expression cherchée de $f(x) - f(a)$, le facteur $x - a$ qui multiplie ce rapport est le moins faible. L'erreur commise, qu'on n'aurait eu soin d'y réduire qu'auprès de la limite $x = a$, irait donc s'exagérant à l'approche de l'autre limite, tandis que, obligée de s'annuler même à cette dernière lorsqu'on pose $A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, elle n'a nulle part, en quelque sorte, assez de jeu pour grandir beaucoup.

L'opération qui consiste à remplacer ainsi, entre deux limites $x = a$, $x = b$, une fonction $f(x)$ par une autre plus simple, comme $f(a) - A(x - a)$, en vue d'obtenir avec une certaine approximation les valeurs $f(x)$ intermédiaires, s'appelle *interpolation* quand on y astreint la fonction plus simple à égaler la proposée $f(x)$ aux deux limites, et *extrapolation*, quand on l'astreint à égaler $f(x)$ à une limite seulement, mais en l'y faisant varier comme $f(x)$. Dans le cas où la fonction plus simple est du premier degré, de la

forme

$$f(a) + A(x - a),$$

et où il s'agit par conséquent de substituer à l'arc, s'étendant entre les abscisses a, b, de la courbe qu'exprime l'équation $y = f(x)$, une droite $y = f(a) + A(x - a)$ issue de son extrémité $x = a$, l'interpolation consiste donc à prendre, comme il vient d'être indiqué, $A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, ou à remplacer l'arc par sa corde, et, l'extrapolation, à poser, conformément à la formule (8), $A = f'(a)$, ou à prolonger la courbe dans la direction qu'elle affecte à l'extrémité considérée $x = a$, en lui substituant ainsi sa tangente. Dans les deux cas, vu la constance supposée du rapport des accroissements $f(x) - f(a)$ de la fonction à ceux $x - a$ de la variable, l'opération est dite effectuée *par parties proportionnelles*; mais le *coefficient de proportionnalité*, A, n'y est pas tout à fait le même. Les réflexions qui précèdent montrent que l'interpolation, où l'erreur se trouve annulée séparément à chaque limite, est plus *sûre* que l'extrapolation, et qu'elle est aussi généralement plus facile, du moins dans les cas où rien ne s'oppose à ce qu'on évalue directement la fonction aux deux limites.

La méthode d'approximation des racines *par double fausse position*, après qu'on a obtenu deux limites voisines $x = a$, $x = b$ donnant des signes contraires au premier membre de l'équation $f(x) = 0$, équivaut à supposer, dans l'intervalle,

$$f(x) = f(a) + A(x - a), \qquad \text{avec} \qquad A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

et, par conséquent, à procéder par interpolation, tandis que la méthode d'approximation de Newton consiste à prendre, entre les mêmes limites,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

ou à opérer par extrapolation. D'ordinaire, elles se complètent mutuellement et donnent pour $x - a$, à l'instant où $f(x) = 0$, deux valeurs approchées $-\frac{f(a)}{A}$, $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, entre lesquelles se trouve la vraie. En effet, par raison de continuité ou plutôt de graduelle variation, le rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ s'éloigne de sa valeur initiale $f'(a)$ à mesure que x s'éloigne de a, et n'a pas cessé de varier ainsi toujours dans un même sens quand il atteint sa valeur A relative à l'autre limite $x = b$, pourvu, du moins, que l'intervalle $b - a$ soit suffisam-

ment étroit; d'où il suit que la valeur $\frac{-f(a)}{x-a}$ de ce rapport, à l'instant intermédiaire inconnu où $f(x)=0$, est comprise entre les deux quantités $f'(a)$, A, très peu différentes, et que, par conséquent, la correction, $x-a$, tombe entre $-\frac{f(a)}{A}$ et $-\frac{f(a)}{f'(a)}$. Mais, si l'on devait choisir entre les deux procédés, ce serait, à tous les points de vue, l'ancienne et naturelle méthode de *double fausse position*, ou *des différences*, qu'il faudrait préférer, d'après les considérations précédentes.

37. — Application aux calculs logarithmiques.

On sait que l'interpolation par parties proportionnelles sert à évaluer les logarithmes décimaux non contenus dans les Tables, par exemple, ceux des nombres fractionnaires compris entre 1000 et 10000 quand on se sert de Tables donnant dans cet intervalle, avec cinq décimales exactes, les logarithmes de tous les entiers. Pour reconnaître qu'elle y est parfaitement légitime, essayons d'apprécier l'erreur relative qu'elle entraîne sur la correction cherchée, c'est-à-dire sur la quantité qu'il faut ajouter au logarithme donné d'un certain nombre n, pour avoir celui du nombre proposé $n+h$ compris entre n et $n+1$. Comme les logarithmes des nombres entiers ou fractionnaires, leurs différences respectives et telles fractions déterminées qu'on voudra de ces différences sont, dans les divers systèmes de logarithmes, des quantités simplement proportionnelles aux *modules*, il est clair que l'erreur *relative* commise sur la correction sera la même dans tous; ce qui permet de raisonner comme s'il s'agissait de logarithmes naturels, ou de la fonction $\log x$ qui a pour dérivée $\frac{1}{x}$. D'après la formule de la page 35, le rapport de la correction exacte $\log(n+h)-\log n$, accroissement de la fonction, à l'accroissement correspondant h de la variable, égalera la dérivée prise pour une valeur intermédiaire $n+\theta h$ de celle-ci; et, si l'on appelle δ cette correction exacte, on aura

$$\delta=\frac{h}{n+\theta h}. \tag{9}$$

Or la *différence tabulaire* est la valeur, $\frac{1}{n+\theta_1}$, qu'elle reçoit dans le cas particulier $h=1$, cas pour lequel j'appellerai θ_1 ce que devient θ: et la règle des parties proportionnelles consiste à prendre en général δ égal à sa fraction h, ou à poser $\delta=\frac{h}{n+\theta_1}$, valeur approchée infé-

rieure à la valeur exacte (9), de

$$(10)\qquad \frac{h}{n+\theta h}-\frac{h}{n+\theta_1}=\frac{h}{n+\theta h}\,\frac{\theta_1-\theta h}{n+\theta_1}.$$

L'erreur relative par défaut qu'entraîne l'application de la règle usuelle égale donc $\frac{\theta_1-\theta h}{n+\theta_1}$, fraction qui n'atteint pas $\frac{1}{n}$, car son numérateur est, en valeur absolue, inférieur à l'unité, et, son dénominateur, supérieur à n. Ainsi, quand on se sert, dans la Table, des logarithmes des nombres entiers compris entre 1000 et 10000, l'interpolation par parties proportionnelles n'altère pas même de leur millième partie les corrections à effectuer; et, comme la plus grande différence tabulaire, entre ces limites, est l'excédent, 0,000 43, du logarithme de 1001 sur celui de 1000, l'erreur n'atteint jamais 0,000 000 43, quantité complètement insensible, puisqu'elle n'est pas le dixième de l'erreur la plus grande, pouvant s'élever à une demi-unité du cinquième ordre décimal, que cause la suppression des décimales du sixième ordre et au-dessus.

Dès que n dépasse quelques unités, θ et θ_1 égalent sensiblement $\frac{1}{2}$, d'après une formule qu'on verra plus loin [n° 94, formule (13)]. On le reconnaît, du reste, de suite en observant que, à égale distance de part et d'autre de la valeur $x=n+\frac{1}{2}h$, moyenne entre les deux considérées (relativement peu différentes) n et $n+h$, les *pentes*, $f'(x)$, d'une fonction $f(x)$ aussi graduellement variable que $\log x$, prennent deux valeurs dont l'une dépasse $f'(n+\frac{1}{2}h)$, très sensiblement autant que l'autre est en dessous; d'où il suit qu'à des accroissements infiniment petits égaux dx, comptés à partir de deux valeurs x ainsi équidistantes de $n+\frac{1}{2}h$, il correspond deux accroissements $f'(x)\,dx$ de la fonction ayant, à fort peu près, la même somme que si chacun d'eux valait $f'(n+\frac{1}{2}h)\,dx$. Donc, même en tenant un compte très approché des variations de la pente $f'(x)$ entre les deux limites $x=n$ et $x=n+h$, l'accroissement total, $f(n+h)-f(n)$, de la fonction, d'une de ces limites à l'autre, est le produit du facteur constant $f'(n+\frac{1}{2}h)$ par la somme, h, des accroissements successifs dx de la variable; ce qui revient bien à prendre $n+\frac{1}{2}h$ pour la valeur intermédiaire précédemment appelée $n+\theta h$, ou à écrire $\theta=\frac{1}{2}$.

Cela posé, en remplaçant de la sorte θ et θ_1 par $\frac{1}{2}$, et en négligeant d'ailleurs au dénominateur θh à côté de n, l'erreur absolue par défaut (10), comparée à la différence tabulaire $\frac{1}{n+\theta_1}$, en sera la fraction

$\frac{h(1-h)}{2n}$, au plus égale à $\frac{1}{8n}$, car l'expression $h(1-h)$, ou $\frac{1}{4}-(h-\frac{1}{2})^2$, ne dépasse évidemment jamais le terme $\frac{1}{4}$ auquel elle se réduit pour $h=\frac{1}{2}$. La plus grande erreur qu'entraîne la règle usuelle d'interpolation n'est donc que la $8n^{ième}$ partie environ de la différence tabulaire. Aussi pourrait-on, à la rigueur, employer cette règle, sans cesser de garder cinq décimales dans les logarithmes, si l'on se servait d'une Table ne donnant les logarithmes des nombres entiers que de 100 à 1000; car la différence entre les deux logarithmes décimaux de 100 et de 101 est 0,00432, fraction dont la $8n^{ième}$ partie, c'est-à-dire ici le 800ième, ne dépasse pas beaucoup une demi-unité du cinquième ordre décimal. Il n'y aurait donc lieu qu'assez rarement de forcer d'une unité le dernier chiffre décimal de la correction ou, plutôt, du logarithme, lequel peut déjà dans la Table, pour le nombre n, n'être approché qu'à une demi-unité près par défaut.

On voit toutefois que le procédé ordinaire d'interpolation cesse d'être sûr, dans les calculs logarithmiques à cinq décimales, quand la *différence tabulaire* atteint la valeur 0,00432, ou, ce qui revient au même, quand il se présente une différence relative allant jusqu'à $\frac{1}{100}$ entre deux nombres consécutifs (entiers ou fractionnaires) de la Table dont on veut se servir; car alors, si l'on remplace les deux nombres consécutifs à employer de cette Table, et le nombre intermédiaire dont on demande le logarithme, par d'autres proportionnels, c'est-à-dire ayant entre leurs logarithmes les mêmes différences, mais calculés de manière à rendre égale à 1 la différence des deux nombres en question de la Table, le plus petit d'entre eux ne dépasse pas 100 et l'erreur entraînée par la règle peut être supérieure à une demi-unité du cinquième ordre décimal. Toute différence tabulaire employée sera donc tenue de ne pas excéder environ 400 unités de cet ordre, à moins qu'on n'use de modes d'interpolation plus complexes, en ajoutant, par exemple, à la correction accoutumée, la fraction $\frac{h(1-h)}{2n}$ de la différence tabulaire, tant que celle-ci restera inférieure à une certaine limite (au-dessus de laquelle ce procédé même ne suffirait plus).

Le cas signalé se produit pour les sinus et les tangentes d'une centaine d'arcs environ au commencement des Tables trigonométriques; on évitera donc de s'y servir de la règle d'interpolation usuelle. Comme ces sinus et tangentes sont sensiblement en raison directe de leurs arcs, on n'aura qu'à y appliquer le principe des petits accroissements proportionnels, non aux logarithmes, mais seulement aux nombres, c'est-à-dire aux fonctions sinus et tangente, comparées à l'arc.

38. — Différentiation de fonctions explicites quelconques.

Les fonctions explicites de forme finie exprimables par les signes de l'Algèbre ou de la Trigonométrie, n'étant que des combinaisons des fonctions simples étudiées dans les seconde et troisième Leçons, se réduisent à des fonctions de fonction, ou à des fonctions composées, de celles-là. Donc les règles précédentes permettront de les différentier toutes. Plusieurs même de ces règles n'auraient pas eu besoin d'être directement démontrées; car elles constituent de simples applications des autres.

Telle est, par exemple, celle qui concerne un produit uvw de facteurs variables. En n'y faisant varier successivement que u, ou v, ou w, on a les trois dérivées partielles vw, wu, uv; et la formule (6) donne bien, pour la dérivée totale du produit, $vwu' + wuv' + uvw'$, conformément à la relation (1) de la page 37. De même, les deux dérivées partielles d'un quotient $\frac{u}{v}$, ou uv^{-1}, par rapport à u et à v, sont $\frac{1}{v}$, $\frac{-u}{v^2}$, ce qui conduit bien à la dérivée en x, $\frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$, obtenue également à la page 37 [formule (2)].

De même encore, la règle pour différentier une fonction $y = f(x)$, inverse d'une autre donnée $x = \varphi(y)$, résulte immédiatement de celle de différentiation des fonctions de fonction; car $\varphi(y)$, expression de x, n'est autre que la fonction de fonction $\varphi[f(x)]$ et, par conséquent, sa dérivée $\frac{dx}{dx}$ ou 1 vaudra le produit des dérivées $\varphi'(y)$, $f'(x)$ des deux fonctions qui y figurent. Ainsi, ces deux dérivées, de la fonction directe $\varphi(y)$ et de la fonction inverse $f(x)$, égalent bien l'inverse l'une de l'autre, conformément à la règle de la page 43, que l'on a plusieurs fois appliquée (pp. 51 et 60).

Prenons, comme exemple de fonction composée dont la dérivée n'ait pas été obtenue dans les Leçons précédentes, l'*exponentielle à base variable* $y = u^v$. Sa dérivée par rapport à u est celle d'une puissance de la forme u^m et vaut, par conséquent, vu^{v-1}, tandis que sa dérivée par rapport à v est celle d'une exponentielle de la forme a^v et vaut $u^v \log u$. On aura donc $y' = vu^{v-1}u' + (u^v \log u)v'$. Si l'on a, par exemple, $u = x$ et $v = x$, ou $y = x^x$, il vient simplement

$$y' = x^x(1 + \log x),$$

vu que u' et v' se réduisent à l'unité.

39. — Différentiation des fonctions implicites.

Même les dérivées des fonctions *implicites* définies au moyen d'équations non résolues s'obtiendront, et sous une forme remarquable, à l'aide des règles précédentes, pourvu que les membres de ces équations soient des fonctions explicites connues des variables qui y paraîtront.

Commençons par le cas d'une seule équation, ramenée à la forme $F(x, y) = 0$, ou même plus généralement à la forme $F(x, y) =$ une constante c, entre une variable indépendante x et une fonction y de celle-ci. Le premier membre $F(x, y)$, supposé qu'on y regarde d'abord y comme une fonction quelconque de x, est évidemment une certaine fonction composée, ayant pour dérivée complète $F'_x(x, y) + F'_y(x, y) y'$. Mais si, de proche en proche, on détermine y par la condition donnée que, x variant, $F(x, y)$ ne cesse pas d'égaler la constante c, cette dérivée complète s'annulera continuellement, et l'on aura

$$F'_x + y' F'_y = 0.$$

Autrement dit, le rapport des changements élémentaires dx et dy, qu'éprouveront à chaque instant les variables x et y, *se réglera*, en vertu de l'équation $F(x, y) = c$, de manière qu'il y ait compensation entre les deux accroissements infiniment petits partiels correspondants, $F'_x dx$ et $F'_y dy$ ou $F'_y y' dx$, de la fonction $F(x, y)$. Il vient donc, en y', l'équation du premier degré, dite *équation de Sluze*,

$$(11) \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0; \qquad \text{d'où} \qquad y' = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)};$$

et la dérivée de la fonction implicite y se trouve ainsi exprimée au moyen des valeurs *actuelles* x, y des variables; ce qui dispense d'une discussion plus ou moins laborieuse pour chercher ce que deviendraient x et y dans le voisinage.

L'équation proposée $F(x, y) = c$ n'étant pas du premier degré en y (sans quoi sa résolution, immédiate, changerait y en une fonction explicite de x), l'une au moins des deux dérivées partielles de F, savoir $F'_y(x, y)$, contiendra y dans son expression. Donc la dérivée trouvée y', quotient de $-F'_x$ par F'_y, différera de celle qu'on aurait eue si la fonction y avait été explicite, en ce que sa valeur ne sera pas exprimée en fonction de x seulement, mais aussi et surtout en fonction de y: circonstance qui oblige finalement, si l'on veut calculer y', à résoudre l'équation

$F(x, y) = c$ pour la valeur *actuelle* de x, mais d'où résulte, par le fait même, dans les cas où il existe plusieurs racines y ou plusieurs branches de la courbe $F(x, y) = c$, le précieux avantage de pouvoir obtenir pour toutes une dérivée de la même forme, ne se diversifiant de l'une à l'autre racine qu'à raison de la valeur différente de y. Si, par exemple, l'équation $F(x, y) = c$ a pour premier membre une fonction rationnelle et entière de x et de y, comme il arrive, après l'évanouissement des dénominateurs et l'élimination des radicaux, dans l'étude des courbes algébriques, les dérivées partielles F'_x, F'_y seront aussi deux polynômes; et le *coefficient angulaire* y' de la tangente se trouvera exprimé par une fonction *rationnelle* de x et de y, beaucoup plus simple que l'expression, compliquée de radicaux, à laquelle conduirait la différentiation de la valeur explicite de y dans les cas, les moins difficiles pourtant, où l'équation $F(x, y) = c$ serait algébriquement résoluble.

Soit, comme exemple, l'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

On a ici $c = 0$ et $F(x, y) = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2$; d'où

$$F'_x = 2b^2x, \qquad F'_y = 2a^2y.$$

Il vient donc, pour le coefficient angulaire de la tangente,

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \text{au lieu de} \quad y' = \mp\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

qu'on aurait en prenant les deux valeurs explicites, $\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, de y.

Une fonction y inverse d'une autre $x = \varphi(y)$ peut être encore présentée comme exemple remarquable de fonction implicite. Elle se trouve, en effet, définie par l'équation non résolue $x - \varphi(y) = 0$; ce qui donne $F(x, y) = x - \varphi(y)$, $F'_x = 1$, $F'_y = -\varphi'(y)$: d'où, en vertu de (11), $y' = \frac{1}{\varphi'(y)}$, conformément à la règle, presque évidente d'ailleurs, rappelée plusieurs fois, pour différentier ces sortes de fonctions. Elles offrent, comme on voit, cette particularité, que leur dérivée ne dépend pas directement de la variable indépendante x, mais seulement de la fonction.

Passons maintenant au cas de plusieurs fonctions implicites y, z, u, c'est-à-dire à celui où l'on a, entre x et y, z, u, pour définir ces fonctions, un pareil nombre d'équations non résolues, de la forme

$f(x, y, z, u) = 0$, $\varphi(x, y, z, u) = 0$, $\psi(x, y, z, u) = 0$, ou, plus généralement,

$$f(x, y, z, u) = c, \qquad \varphi(x, y, z, u) = c', \qquad \psi(x, y, z, u) = c'',$$

c, c', c'' désignant des constantes quelconques. Comme les variables y, z, u varient, avec x, de manière que les fonctions composées f, φ, ψ gardent sans cesse leurs valeurs primitives, il y aura encore lieu d'annuler les dérivées complètes des premiers membres f, φ, ψ, c'est-à-dire de poser, entre y', z', u', les équations du premier degré, à coefficients fonctions de x, y, z, u:

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{df}{dx} + \dfrac{df}{dy} y' + \dfrac{df}{dz} z' + \dfrac{df}{du} u' = 0, \\ \dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\varphi}{dy} y' + \dfrac{d\varphi}{dz} z' + \dfrac{d\varphi}{du} u' = 0, \\ \dfrac{d\psi}{dx} + \dfrac{d\psi}{dy} y' + \dfrac{d\psi}{dz} z' + \dfrac{d\psi}{du} u' = 0. \end{cases}$$

Donc, *quand plusieurs fonctions d'une variable sont définies par un pareil nombre d'équations non résolues, les dérivées de ces fonctions s'obtiennent, quelque compliquées que soient les relations données, en résolvant un simple système d'équations du premier degré, auxquelles conduit la différentiation de ces relations.* Il vient par suite, si les équations proposées sont algébriques et débarrassées de leurs radicaux, des expressions des dérivées cherchées y', z', u' contenant rationnellement la variable indépendante x et les fonctions implicites y, z, u elles-mêmes; de sorte que ces expressions *uniques* donnent autant de systèmes distincts de valeurs qu'il y en a pour les fonctions implicites, c'est-à-dire qu'il y a de systèmes de racines y, z, u, fournis par les équations proposées après substitution à x de sa valeur actuelle. On ne sera donc pas dispensé de déterminer finalement ces systèmes de valeurs de y, z, u; mais une *résolution numérique des équations suffira, au lieu de la résolution générale, ou d'une infinité de résolutions numériques, qu'il aurait fallu pour reconnaître directement la manière de varier des fonctions y, z, u dans le voisinage de leurs valeurs actuelles.*

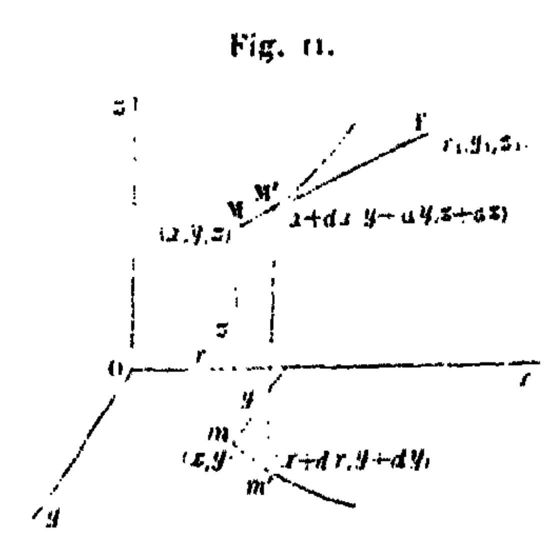
40*. — Supériorité d'une certaine forme implicite de l'équation, sur sa forme explicite, pour exprimer une courbe plane; équation de la tangente; des points singuliers que présentent certaines courbes.

(Compléments, p. 44*.)

11. — Plan tangent à une surface.

Quand une surface est représentée par une certaine équation, de la forme $z = f(x, y)$, entre son ordonnée z et ses coordonnées x et y, z devient une fonction composée ne dépendant, en définitive, que d'une seule variable t, pour toutes les lignes, MM' par exemple, tracées sur cette surface. Si l'on mène, en effet, des parallèles comme Mm, M'm', ..., à l'axe des z, leurs pieds, m, m', ... sur le plan des xy, formeront une certaine ligne où x et y, coordonnées du point

Fig. 11.



quelconque m, seront, par exemple, fonctions d'une variable auxiliaire t, car on pourra concevoir cette ligne décrite par un mobile (p. 23); et l'ordonnée correspondante mM $= z = f(x, y)$ de la surface deviendra bien aussi fonction de t par l'intermédiaire de x et y.

Faisons, pour abréger, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, ou convenons d'appeler p et q les deux dérivées partielles respectives $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, que nous supposerons d'ailleurs continues et bien déterminées dans tout le voisinage du point considéré $m(x, y)$, jusqu'à de très petites distances. La dérivée z' sera évidemment $px' + qy'$: en d'autres termes, on aura

$$(16) \qquad dz = p\,dx + q\,dy.$$

Cela posé, concevons que l'on mène sur la surface, à partir du même point M et dans tous les sens possibles, une infinité de courbes comme MM', auxquelles correspondront, sur le plan des xy, tout autant de lignes mm' rayonnant autour de m. Un point quelconque $M'_1(x + dx, y + dy, z + dz)$ de la surface, infiniment voisin de M, pourra ainsi lui être relié par un arc élémentaire MM', dont la tangente en M sera le prolongement, M'T, de sa corde MM' dans la situa-

tion limite qu'on a en vue par le fait même qu'on emploie les notations dx, dy. Si l'on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point mobile T décrivant cette tangente, les trois différences x_1-x, y_1-y, z_1-z varieront d'ailleurs, d'après un caractère distinctif des droites dans l'espace, proportionnellement à MT, en gardant sans cesse entre elles les mêmes rapports qu'à l'instant où T se trouve en M' et où x_1-x, y_1-y, z_1-z égalent dx, dy, dz. Les différentielles dx, dy, dz peuvent donc être remplacées, dans l'équation (16) qui contient seulement leurs rapports mutuels, par x_1-x, y_1-y, z_1-z; et il vient, entre les *coordonnées courantes* x_1, y_1, z_1 de toutes les cordes infiniment petites prolongées, ou *tangentes*, menées en M à la surface, la relation du premier degré

$$z_1-z=p(x_1-x)+q(y_1-y). \tag{17}$$

Or, dans cette relation, où z_1-z varie proportionnellement à x_1-x, tant que y_1-y ne change pas, et proportionnellement à y_1-y (avec un autre coefficient de proportionnalité) dès que x_1-x reste constant, on reconnaît l'équation d'un plan. Elle nous permet donc de dire qu'*une tangente à la surface, en tournant sur celle-ci autour de son point de contact, décrit un plan*, ou encore que, *dans une étendue infiniment petite autour du point de contact considéré, la surface ressemble à ce plan au même degré qu'une courbe à sa tangente*. En effet, nulle ligne telle que MM', tracée sur la surface à partir de M, ne peut s'écarter du plan en question plus qu'elle ne fait de sa tangente MT qui s'y trouve comprise, dont la distance à un quelconque, M', des points de la courbe voisins, égale seulement le produit de la corde correspondante MM' par le sinus de l'angle infiniment petit TMM' de celle-ci avec sa direction limite MT. Et de même que toute droite fixe issue de M, mais différente de MT, fait avec les cordes comme MM' et avec MT des angles finis ou sensibles, de même aussi, tout plan mené par M, mais autre que le lieu des tangentes MT, coupera ce lieu sous un angle fini et s'écartera infiniment plus que lui de la surface dans le voisinage de M.

Pour ces diverses raisons, le plan représenté par l'équation (17) est dit *tangent* en $M(x, y, z)$ à la surface. On voit qu'il est le seul plan, mené par le point de contact M, dont tout point de la surface soit incomparablement plus proche que du point de contact lui-même, dans un très petit rayon autour de ce dernier; de même que la tangente à une courbe est la seule droite, menée par son point de contact, dont les points de la courbe voisins soient infiniment moins distants que de ce point de contact.

42*. — Supériorité d'une forme implicite de l'équation d'une surface sur sa forme explicite; des points singuliers de certaines surfaces.

(Compléments, p. 48*.)

43*. — Différentiation d'une fonction de point le long d'un chemin donné.

(Compléments, p. 51*.)

44*. — Paramètre différentiel du premier ordre d'une fonction de point.

(Compléments, p. 54*.)

45*. — Signification géométrique du paramètre différentiel du premier ordre; cosinus directeurs des normales à une famille de surfaces.

(Compléments, p. 57*.)

46*. — Pente d'une surface; notion des lignes de niveau et des lignes de plus grande pente.

(Compléments, p. 60*.)

SIXIÈME LEÇON.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR DES FONCTIONS SIMPLES OU COMPOSÉES; *COURBURE DES COURBES PLANES ET PARAMÈTRE DIFFÉRENTIEL DU SECOND ORDRE DES FONCTIONS DE POINT; *CHANGEMENTS DE VARIABLES.

47. — Des dérivées d'ordre supérieur : exemples.

La dérivée d'une fonction $y = f(x)$ d'une variable indépendante x étant une nouvelle fonction, $\frac{dy}{dx}$ ou $f'(x)$, et celle-ci, dans toutes les applications de l'Analyse, se trouvant graduellement variable comme y (sauf parfois pour des valeurs isolées de x), il y a lieu de considérer sa propre dérivée : on appelle *dérivée seconde* de la fonction $f(x)$ ou y cette dérivée de la dérivée *première*. Dans le mode de notation de Newton ou de Lagrange, on la représente au moyen de deux accents dont on affecte la lettre désignant la fonction, c'est-à-dire qu'on l'écrit, par exemple, y'' ou $f''(x)$. De même, la propre dérivée de cette dérivée seconde reçoit le nom de *dérivée troisième* et se marque, au moyen de trois accents, y''' ou $f'''(x)$. Et ainsi de suite.

Prenons, comme premier exemple, le polynôme, d'un degré entier quelconque m,

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots.$$

En différentiant sa dérivée première

$$y' = m A_0 x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + (m-2) A_2 x^{m-3} + \ldots,$$

qui est un nouveau polynôme, mais du degré $m-1$, il vient

$$y'' = m(m-1) A_0 x^{m-2} + (m-1)(m-2) A_1 x^{m-3} + \ldots;$$

et l'on continue de même pour les dérivées suivantes. Le degré du résultat s'abaisse d'une unité à chaque différentiation; de sorte que la dérivée $m^{\text{ième}}$, $y^{(m)} = (1.2.3\ldots m) A_0$, n'atteint plus que le degré zéro. Ainsi, *quand une fonction est rationnelle et entière, sa dérivée d'un ordre égal au degré de la fonction se réduit à une constante, et les dérivées d'ordres plus élevés sont nulles.*

Soient, comme second exemple, les trois fonctions

$$y = e^x, \qquad y = \cosh x \text{ ou } \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad y = \sinh x \text{ ou } \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

On sait que, s'il s'agit de la première, sa dérivée lui est égale : fait d'où l'on déduit aisément que, s'il est question de la deuxième et de la troisième, chacune des deux a l'autre pour dérivée. Donc, *l'exponentielle e^x se reproduit à chaque différentiation, et, les fonctions hyperboliques* $\cosh x$, $\sinh x$, *à chaque couple de différentiations*. C'est ce qu'on exprime, pour l'exponentielle $y = e^x$, par l'équation $y' = y$ et, pour les deux fonctions $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, par l'équation $y'' = y$.

Prenons enfin, comme dernier exemple, les deux fonctions circulaires $y = \cos x$, $y = \sin x$. Ici, chacune des deux a l'autre pour dérivée, avec changement de signe quand on différentie le cosinus; ce qui fait toujours un changement de signe et un seul sur deux différentiations consécutives. Par conséquent, *chacune des deux fonctions circulaires $y = \cos x$, $y = \sin x$ ne se reproduit qu'en valeur absolue par deux différentiations;* et l'on a, non plus, comme pour les cosinus et sinus hyperboliques, l'équation $y'' = y$, mais bien l'équation $y'' = -y$ ou $y'' + y = 0$. En tenant compte des signes, il faudra donc quatre différentiations consécutives pour retomber sur la fonction d'où l'on part.

48. — Désignation de ces dérivées par des quotients différentiels; notations et opérations symboliques.

La notation de Leibnitz s'applique également aux dérivées d'ordre supérieur, puisque ce sont toujours des dérivées premières d'autres dérivées et que toute dérivée première est le rapport des deux accroissements infiniment petits simultanés de la fonction qu'on différentie et de sa variable. Dans le calcul d'une dérivée seconde $y'' = f''(x)$, la fonction actuellement différentiée n'est plus y, mais bien sa dérivée $\frac{dy}{dx}$, dont la différentielle correspondant à l'accroissement dx de la variable s'écrit naturellement $d\,\frac{dy}{dx}$: cette dérivée seconde sera donc indiquée par $\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx}$. La dérivée troisième, quotient de la différentielle de cette nouvelle fonction par dx, aura de même pour notation $\frac{d\,\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx}}{dx}$;

et ainsi de suite. Afin de réduire l'espace excessif que tiennent bientôt ces expressions dans le sens de la hauteur, on convient de mettre la fonction différentiée, lorsqu'elle est déjà une dérivée et, par conséquent, une fraction, non en numérateur à la place laissée en blanc dans $\frac{d}{dx}$, mais après cette sorte de fraction fictive $\frac{d}{dx}$ et sur la même ligne qu'elle, comme si l'on se contentait d'abord d'indiquer une multiplication algébrique de fractions, dans l'idée de l'effectuer plus tard en faisant de toute la fraction multiplicateur le dernier facteur du numérateur du multiplicande, chose évidemment permise. La dérivée première pourrait ainsi s'écrire $\frac{d}{dx}y$, s'il n'était plus simple de mettre $\frac{dy}{dx}$; mais la dérivée seconde s'écrira effectivement $\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}$; la dérivée troisième, $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}$; etc.

La notation $\frac{d}{dx}$ devient ainsi la simple indication d'une différentiation, à effectuer par rapport à x sur la fonction écrite à la suite. On qualifie de *symbolique* toute expression analogue, qui ressemble, dans les formules, à une *expression algébrique* ordinaire ou représentative de quantités, mais qui, en réalité, n'indique qu'une certaine opération ou un certain ensemble d'opérations, à effectuer sur des quantités désignées (ou censées l'être) après. Ces sortes d'expressions sont très commodes quand, pareillement à ce qu'on vient de voir pour la répétition du *symbole* $\frac{d}{dx}$, les opérations infinitésimales, ou les autres combinaisons qu'elles indiquent, se succèdent et s'enchaînent comme les opérations algébriques qu'on aurait à effectuer si ces expressions représentaient des quantités véritables; car alors il suffit de leur appliquer presque mécaniquement les règles du calcul algébrique dont on a l'habitude, pour pouvoir, en quelque sorte, *transposer*, à la fin des opérations, les résultats donnés par ce calcul dans l'Analyse infinitésimale où leur sens devient tout autre. Déjà, en Algèbre et dans la théorie des fonctions circulaires (n° 19*, p. 10*), le signe $\sqrt{-1}$ avait été une véritable expression symbolique, propre à ramener certains genres de combinaisons au mécanisme d'opérations sur des quantités; et l'on a vu combien l'emploi de ce symbole pouvait être utile.

Mais, pour revenir à la notation leibnitzienne des dérivées d'ordre supérieur, il y a lieu de chercher si l'on ne pourrait pas, en la simplifiant encore, obtenir une nouvelle et plus intuitive signification

de ces dérivées. Or c'est ce qu'a fait Leibnitz lui-même, par la découverte des différentielles d'ordre supérieur dont il va être parlé.

19. — Différences et différentielles d'ordre supérieur.

Convenons de donner successivement à la variable x d'une fonction $y = f(x)$ un petit accroissement ou une petite différence, Δx, aussi faible que l'on voudra, mais toujours égale, c'est-à-dire la même quelle que soit la valeur *actuelle* de x à laquelle on l'ajoute, ou la fonction de x pour laquelle on l'emploie dans le cours d'une question. La différence correspondante, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, de la fonction $f(x)$ aura pour expression, comme on sait, $[f'(x) + \varepsilon]\Delta x$, ε désignant une fonction de x et de Δx très petite pour toutes les valeurs de x et qui même s'annulerait continuement si l'on faisait la constante Δx égale à zéro. Ainsi, Δy est une nouvelle fonction de x, sur laquelle on peut, malgré son incessante petitesse, raisonner comme on l'a fait sur $f(x)$. Si l'on en prend la différence $\Delta(\Delta y)$, obtenue en faisant, dans son expression, croître x de Δx et en considérant ainsi l'excédent de $f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)$ sur $f(x + \Delta x) - f(x)$, on aura ce qu'on appelle la *différence seconde* de la fonction proposée y. Cette différence de la différence *première* s'écrira naturellement $\Delta\Delta y$ ou, pour abréger, $\Delta^2 y$, en représentant par la *puissance symbolique* Δ^2 la répétition $\Delta\Delta$. Or la fonction Δy, étant le produit du facteur constant Δx par la quantité variable $f'(x) + \varepsilon$, grandit évidemment, entre une valeur de x et la suivante, du produit de l'accroissement correspondant, $\Delta f'(x) + \Delta\varepsilon$, de cette quantité variable, par le facteur constant Δx; et l'on a

$$(1) \qquad \Delta^2 y = [\Delta f'(x) + \Delta\varepsilon]\Delta x.$$

Mais les petits accroissements $\Delta f'(x)$, $\Delta\varepsilon$, de $f'(x)$ et de ε, s'expriment, au moyen des dérivées $f''(x)$, $\frac{d\varepsilon}{dx}$ de ces fonctions, comme s'exprimait $\Delta f(x)$ au moyen de $f'(x)$; de sorte que, en appelant ε_1, ε' deux nouvelles fonctions de la nature de ε, c'est-à-dire évanouissantes quand la constante Δx se réduit à zéro, l'on pourra écrire

$$\Delta f'(x) = [f''(x) + \varepsilon_1]\Delta x, \qquad \Delta\varepsilon = \left(\frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon'\right)\Delta x;$$

et il viendra, par la substitution de ces valeurs dans (1),

$$(2) \qquad \Delta^2 y = \left[f''(x) + \varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon'\right](\Delta x)^2.$$

Or, dans la quantité entre crochets, le terme $\frac{d\varepsilon}{dx}$ est de la même nature que le précédent ε_1 ou le suivant ε', et donne avec eux une somme totale tendant vers zéro en même temps que Δx. Car, d'une part, la fonction de x et de Δx appelée ε s'annule *pour toutes les valeurs de* x quand on fait $\Delta x = 0$ et a, par conséquent, sa dérivée $\frac{d\varepsilon}{dx}$ alors nulle identiquement; d'autre part, cette dérivée $\frac{d\varepsilon}{dx}$, en vertu du principe de graduelle variation que nous admettons ici dans toutes nos fonctions, ne peut pas acquérir la valeur zéro, relative au cas où Δx s'annule, sans en approcher indéfiniment à mesure qu'on rend Δx de plus en plus voisin de zéro. La somme $\varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon'$ est donc une nouvelle fonction évanouissante de x et de Δx. Si on la représente par ε_2, l'expression de $\Delta^2 y$ deviendra

$$\Delta^2 y = [f''(x) + \varepsilon_2](\Delta x)^2. \tag{3}$$

C'est une nouvelle fonction de x. Prenons-en la différence, qui s'appellera la *différence troisième* de la fonction y, et qui s'écrira $\Delta(\Delta^2 y)$ ou, simplement, $\Delta^3 y$: puisque $\Delta^2 y$ égalait

$$f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x),$$

cette nouvelle différence sera l'excédent de

$$f(x + 3\Delta x) - 2f(x + 2\Delta x) + f(x + \Delta x) \text{ sur } f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$

Sa valeur, produit du facteur constant $(\Delta x)^2$ par l'accroissement que recevra le facteur variable $f''(x) + \varepsilon_2$ quand x y croîtra de Δx, égalera évidemment $[\Delta f''(x) + \Delta\varepsilon_2](\Delta x)^2$; et un raisonnement tout pareil à celui qui nous a conduit de la formule (1) à la formule (3) permettra d'écrire, en appelant ε_3 une nouvelle fonction évanouissante avec Δx,

$$\Delta^3 y = [f'''(x) + \varepsilon_3](\Delta x)^3.$$

On continuera de même jusqu'à la *différence* $n^{\text{ième}}$,

$$\Delta^n y = [f^{(n)}(x) + \varepsilon_n](\Delta x)^n, \tag{4}$$

dont la valeur, divisée par $(\Delta x)^n$, donne

$$f^{(n)}(x) + \varepsilon_n = \frac{\Delta^n y}{(\Delta x)^n}. \tag{5}$$

Si l'on suppose maintenant que, dans celle-ci, l'accroissement Δx soit

pris de plus en plus faible, ε_n tendra vers zéro, et l'on pourra énoncer le principe suivant :

La dérivée $n^{ième}$ d'une fonction est la limite vers laquelle tend le rapport de la différence $n^{ième}$ de cette fonction à la puissance $n^{ième}$ de la différence de la variable, quand cette dernière différence, supposée la même dans la formation de toutes les différences successives de la fonction ou pour toutes les valeurs successives considérées de la variable, s'approche indéfiniment de zéro.

Leibnitz a exprimé, comme pour les différences premières Δx et Δy, cette intention de ne considérer que des résultats limites, en remplaçant la *caractéristique* Δ par la caractéristique d et le nom « *différence d'ordre n* » par son diminutif « *différentielle d'ordre n* ». Une pareille intention annihile évidemment, dans la formule (5), l'influence du terme ε_n, destiné à disparaître à la limite; en sorte que la substitution des d à des Δ réduit cette formule (5) à

$$(6) \qquad f^{(n)}(x) \quad \text{ou} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Donc, *la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction est le quotient de la différentielle $n^{ième}$ de cette fonction par la puissance $n^{ième}$ de la différentielle de la variable, pourvu que les valeurs de celle-ci soient équidistantes, ou que sa différentielle reste la même dans le calcul des différentielles des divers ordres de la fonction jusqu'à la plus haute que l'on ait à considérer.* Ainsi, une dérivée quelconque peut s'exprimer *immédiatement* au moyen de la différentielle correspondante, sans passer par les dérivées d'ordre moindre; et y'', y''', ... sont les simples rapports $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... : mode de notation préférable à celui du numéro précédent, mais supposant les accroissements successifs dx tous égaux et non plus arbitrairement variables d'une dérivée à l'autre.

30. — Sur l'emploi des différences d'ordre supérieur dans les calculs numériques : cas d'une fonction entière.

Dans les calculs d'approximation où l'on fait grandir une variable indépendante x par petits accroissements *égaux* Δx, ceux-ci sont le plus souvent assez faibles pour que la suppression de ε_n dans (4), à côté de $f^{(n)}(x)$, n'entraîne en général qu'une erreur relative très légère. On posera donc, à fort peu près, $\Delta^n y = f^{(n)}(x)(\Delta x)^n$. Comme, d'ailleurs, la dérivée $f^{(n)}(x)$ n'a d'ordinaire que des grandeurs modérées (du moins tant que l'ordre n ne s'élève pas extrêmement), les

différences première, seconde, troisième, ... se trouvent respectivement comparables à Δx, $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$, ..., c'est-à-dire qu'elles sont du premier ordre de petitesse, du second, du troisième, etc. Si donc on ne considère la fonction que dans un intervalle restreint, comprenant un nombre modéré m des valeurs équidistantes choisies de la variable, et si, par suite, ne devant additionner au plus que m valeurs successives d'une différence quelconque de la fonction, on n'a pas à craindre l'accumulation de trop d'erreurs, toutes les différences d'un certain ordre et au-dessus seront assez peu sensibles, même prises en nombre, pour pouvoir être réputées nulles. Alors la différence la plus élevée parmi les autres non négligeables sera constante dans les limites considérées et, ajoutée successivement à elle-même, servira, si l'on veut, à calculer les valeurs successives de la différence précédente, à partir de l'une d'elles directement obtenue; valeurs dont on déduira de même, par de simples additions, celles de la différence dont l'ordre est encore moins élevé de 1, et ainsi de suite jusqu'aux valeurs mêmes de la fonction proposée, qui peut être regardée comme une différence d'ordre zéro.

Il faudrait que la fonction variât bien rapidement, plus qu'il n'arrive d'ordinaire, pour que, dans l'hypothèse de différences Δx petites, mais pourtant sensibles, ce procédé de calcul ne lui fût pas applicable.

Il serait même rigoureux dans le cas d'une fonction rationnelle et entière de degré m, pourvu que l'on poussât le calcul des différences jusqu'à celles de l'ordre $m^{\text{ième}}$: car on reconnaît aisément, par un développement immédiat, que, pour les différences finies d'un polynôme $f(x)$, comme pour ses différentielles ou ses dérivées, le degré en x s'abaisse d'une unité à chaque *différentiation*, c'est-à-dire quand on passe du polynôme à sa différence ou d'une différence à la suivante; en sorte que la *différence* $m^{\text{ième}}$ *est constante*.

51*. — Importance particulière et signification de la dérivée seconde.

(Compléments, p. 63*).

52*. — Courbure d'une courbe plane.

(Compléments, p. 65*).

53. — Dérivées partielles de divers ordres, et différentielles correspondantes, des fonctions composées.

Nous avons vu (p. 81) ce qu'on entend par les dérivées partielles *premières* d'une fonction composée $f(u, v, w)$ de plusieurs variables,

Par exemple, l'une d'elles, la dérivée en u, est $f'_u(u, v, w)$, ou $\frac{f(u+du, v, w)-f(u, v, w)}{du} = \frac{df}{du}$; et une petite *différence partielle* correspondante $f(u+\Delta u, v, w)-f(u, v, w)$, qui s'écrit $\Delta_u f$, a l'expression $[f'_u(u, v, w)+\varepsilon]\Delta u$. Or, la dérivée première $f'_u(u, v, w)$ étant elle-même une fonction de u, v, w, on peut en prendre la dérivée partielle soit par rapport à u, soit par rapport à v, soit par rapport à w; et l'on a ainsi des *dérivées partielles secondes* de la fonction proposée, dérivées qu'on écrira

$$f''_{u,u}(u, v, w),\quad f''_{u,v}(u, v, w),\quad f''_{u,w}(u, v, w),$$

ou encore

$$\frac{d}{du}\frac{df}{du},\quad \frac{d}{dv}\frac{df}{du},\quad \frac{d}{dw}\frac{df}{du}.$$

Pareillement, si, dans la fonction $\Delta_u f(u, v, w)$, on donne à l'une des trois variables u, v ou w un petit accroissement Δu ou Δv ou Δw, *égal à celui de même nom qu'on avait déjà introduit pour former les différences premières*, on aura ce qu'on appelle les *différences partielles secondes* $\Delta_u \Delta_u f$, $\Delta_v \Delta_u f$, $\Delta_w \Delta_u f$.

Considérons, par exemple, la deuxième, $\Delta_v \Delta_u f$, accroissement qu'éprouve la valeur $[f'_u(u, v, w)+\varepsilon]\Delta u$, de $\Delta_u f$, quand v y grandit de Δv. Cet accroissement vaut évidemment le produit du facteur constant Δu par la différence partielle en v, $\Delta_v f'_u(u, v, w)+\Delta_v\varepsilon$, du facteur variable; et, dans celle-ci, $\Delta_v f'_u(u, v, w)$, $\Delta_v\varepsilon$ comportent d'ailleurs, toujours en vertu du principe fondamental de l'existence des dérivées, les expressions

$$[f''_{u,v}(u, v, w)+\varepsilon_1]\Delta v,\quad \left[\frac{d\varepsilon}{dv}+\varepsilon'\right]\Delta v,$$

ε_1 et ε' désignant deux certaines fonctions qui s'évanouissent avec Δv. On a donc, pareillement à (2),

$$(12)\qquad \Delta_v \Delta_u f = \left[f''_{u,v}+\varepsilon_1+\frac{d\varepsilon}{dv}+\varepsilon'\right]\Delta v\,\Delta u.$$

Mais ε est une fonction qui, pour $\Delta u = 0$, s'annulerait quel que fût v et donnerait $\frac{d\varepsilon}{dv} = 0$. C'est dire que la dérivée $\frac{d\varepsilon}{dv}$, fonction elle-même de u, v, w et Δu, dont nous admettons la graduelle variation par rapport à chacune de ses variables, devient aussi petite que l'on veut, comme ε, quand Δu est pris lui-même assez faible. Si donc on appelle, par exemple, ε_2 la somme $\varepsilon_1+\frac{d\varepsilon}{dv}+\varepsilon'$, évanouissante lorsque Δu et Δv tendront si-

multanément vers zéro, il viendra la relation, analogue à (3),

$$(13)\qquad \Delta_v \Delta_u f = [f''_{u,v}(u, v, w) - \varepsilon_2]\, \Delta v\, \Delta u.$$

Cette différence partielle $\Delta_v \Delta_u f$ est aussi une fonction de u, v, w. On pourra donc en prendre la différence par rapport à u, à v ou à w, produit du facteur constant $\Delta v \Delta u$ par l'accroissement correspondant du facteur $f''_{u,v} - \varepsilon_2$: ce sera une *différence partielle troisième* ou du *troisième ordre*. Et, de même, chaque dérivée partielle seconde, différentiée en u, v, w, donnera naissance à tout autant de *dérivées partielles troisièmes*. Si c'est, par exemple, w qui varie, on trouvera évidemment, en appelant ε_3 une quantité tendant vers zéro avec Δu, Δv et Δw,

$$(14)\qquad \Delta_w \Delta_v \Delta_u f = [f'''_{u,v,w}(u, v, w) - \varepsilon_3]\, \Delta w\, \Delta v\, \Delta u.$$

Et l'on aurait une formule semblable pour toute autre différence d'un ordre quelconque.

L'analogie entre les différences d'ordre quelconque et les dérivées correspondantes, démontrée ci-dessus pour les fonctions d'une seule variable, se soutient donc dans les fonctions composées où l'on ne fait varier les diverses variables que successivement; et l'on y arrive aux mêmes conséquences que dans le cas précédent. Divisons, par exemple, l'égalité (14) par le produit des facteurs constants Δw, Δv, Δu; puis changeons les Δ en des d, ou les différences en des *différentielles*, pour indiquer l'intention de passer à la limite et avoir par suite le droit de supprimer les quantités évanouissantes, comme ε_3. Il viendra

$$(15)\qquad f'''_{u,v,w}(u, v, w) = \frac{d_w d_v d_u f}{dw\, dv\, du}.$$

Ainsi, *toute dérivée partielle d'ordre quelconque d'une fonction composée est le rapport de la différentielle partielle analogue de la fonction au produit des différentielles correspondantes (supposées constantes) des variables.*

Les dérivées partielles d'ordre quelconque seront donc, elles aussi, de simples *quotients différentiels*. Et l'on y effacera même, aux numérateurs, les indices u, v, w, comme on l'avait fait dans le cas de celles du premier ordre; car les différentielles du, dv, dw des variables correspondantes figureront aux dénominateurs et indiqueront assez que les différentiations devront se faire par rapport à ces variables, en suivant l'ordre inverse de celui dans lequel se présenteront leurs différentielles; par exemple, la dérivée $f'''_{u,v,w}$ s'écrira $\frac{dddf}{dw\, dv\, du}$, ou plus simplement, par

l'emploi d'un *exposant symbolique* égal au nombre des d successifs du numérateur, $\frac{d^3 f}{dw\,dv\,du}\cdots$.

54. — Interversion de l'ordre des différentiations partielles.

Mais il n'est même pas nécessaire d'observer dans quel ordre se suivent les différentielles du, dv, dw au dénominateur; car *une dérivée partielle quelconque garde la même valeur, quand on change à volonté l'ordre dans lequel se font les différentiations qui s'y trouvent indiquées par rapport aux diverses variables.*

Démontrons d'abord ce théorème pour le cas de deux différentiations, en prouvant qu'on aura, par exemple,

$$\frac{d^2 f(u,v)}{dv\,du} = \frac{d^2 f(u,v)}{du\,dv}.$$

Il suffit évidemment de faire voir que $\Delta_v \Delta_u f(u,v) = \Delta_u \Delta_v f(u,v)$; car il en résultera $d_v d_u f = d_u d_v f$ et, par suite, $\frac{d^2 f}{dv\,du} = \frac{d^2 f}{du\,dv}$, sans qu'on ait même besoin de négliger, dans ces deux rapports limites, aucune quantité évanouissante. Effectivement, $\Delta_u f$ désignant l'accroissement $f(u+\Delta u, v) - f(u,v)$, sa différence par rapport à v, excédent de la nouvelle valeur $f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)$, obtenue en y faisant croître v de Δv, sur la valeur première $f(u+\Delta u, v) - f(u,v)$, a pour expression développée

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v) - f(u+\Delta u, v) + f(u,v);$$

et il est clair que si, au contraire, on faisait croître v d'abord, puis u, de manière à évaluer $\Delta_u \Delta_v f(u,v)$, on aurait, par raison de symétrie, l'expression équivalente

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u+\Delta u, v) - f(u, v+\Delta v) + f(u,v).$$

On peut donc intervertir l'ordre de deux différentiations consécutives. Or il est aisé de passer de ce cas à celui d'un nombre quelconque de différentiations. Considérons, par exemple, la dérivée $\frac{d^3 f}{dw\,dv\,du}$, qui signifie que l'on doit différentier f par rapport à u, puis le résultat par rapport à v et le nouveau résultat par rapport à w. Démontrons que la différentiation en u peut se faire, non plus la première, mais la seconde ou la troisième. En effet, l'expression $\frac{d^2 f}{dv\,du}$, dont on doit prendre finalement la dérivée par rapport à w, ne chan-

gera pas, comme on vient de voir, si l'on intervertit les deux différentiations en v et u; ce qui donnera $\frac{d^3 f}{dw\,du\,dv}$ au lieu de $\frac{d^3 f}{dw\,dv\,du}$; et comme, d'ailleurs, la nouvelle expression $\frac{d^3 f}{dw\,du\,dv}$ peut s'écrire $\frac{d^2}{dw\,du}\,\frac{df}{dv}$, ou signifie qu'on doit prendre la dérivée seconde en u et w de la fonction $\frac{df}{dv}$, cette dérivée seconde sera la même en y changeant l'ordre des deux différentiations ou en l'écrivant $\frac{d^2}{du\,dw}\,\frac{df}{dv} = \frac{d^3 f}{du\,dw\,dv}$. Ainsi, dans la fraction exprimant la dérivée partielle proposée, le facteur symbolique $\frac{d}{du}$, indicatif d'une certaine différentiation, a pu prendre à volonté toutes les places au devant de la fonction f, comme s'il était un simple facteur de multiplication. La même chose se dira évidemment des facteurs symboliques analogues $\frac{d}{dv}$, $\frac{d}{dw}$, en sorte que l'ordre des différentiations est bien indifférent

On profitera de cette circonstance pour simplifier autant que possible l'expression des dérivées, en groupant ensemble, dans les dénominateurs, les différentielles qui y paraîtront plusieurs fois. Par exemple, la dérivée $\frac{d^6 f}{du\,dw\,dw\,dv\,du\,dw}$ s'écrira $\frac{d^6 f}{du^2\,dv\,dw^3}$: quant à son calcul, il sera plus rapide en commençant par la différentiation qui paraîtra devoir donner la dérivée la plus simple, puis en faisant de même sur cette dérivée une fois obtenue, et ainsi de suite.

55. — Calcul des dérivées complètes d'ordre supérieur d'une fonction composée.

Voyons maintenant comment, si u, v, w sont des fonctions de x, nous formerons les dérivées successives en x de la fonction composée $y = f(u, v, w)$. La première y', déjà trouvée (p. 82), est

$$(16) \qquad \frac{dy}{dx} = u'\,\frac{df}{du} + v'\,\frac{df}{dv} + w'\,\frac{df}{dw},$$

où les dérivées u', v', w' de u, v, w sont, d'ordinaire, des fonctions explicites de x. Mais il peut arriver aussi que leur expression connue contienne u, v, w. C'est ce qui a lieu quand u, v, w sont définies au moyen d'équations non résolues; car alors la différentiation de ces équations donne, comme on a vu (p. 93), un système de relations du premier degré, permettant d'obtenir u', v', w' explicitement en x, u, v, w.

Ainsi, dans le cas le plus général, la dérivée y' se présente comme étant une fonction de x, u, v, w. Or on peut avoir compté d'avance la variable indépendante x parmi ses fonctions appelées u, v, w, en augmentant au besoin leur nombre d'une unité : autrement dit, rien n'empêche qu'on ait pris, par exemple, $u = x$, ou qu'on ait réservé la lettre u pour désigner la variable même x en tant qu'elle figurerait immédiatement dans certaines des fonctions composées qu'on étudie, et, cela, même quand la fonction f ne contient pas directement ou explicitement x, cas où elle deviendra indépendante de u et donnera simplement $\frac{df}{du} = 0$. Or, si l'on a introduit de la sorte x parmi les variables u, v, w, comme nous l'admettrons, il est clair que la dérivée première $u'\frac{df}{du} + v'\frac{df}{dv} + w'\frac{df}{dw}$ sera, dans le cas le plus général, une nouvelle fonction explicite de u, v, w. La règle déjà suivie pour différentier $f(u, v, w)$ s'y appliquera donc et donnera la dérivée y'', puis, de même, y''', et ainsi de suite.

Une formule qui se déduit immédiatement de (16), formule symbolique ou exprimant non des quantités, mais un certain mode de calcul, traduit très simplement cette règle en langage analytique. Il suffit, pour l'obtenir, d'effacer de (16) la lettre y ou f qui désigne la fonction de u, v, w actuellement différentiée, en se réservant d'inscrire plus tard cette fonction à la suite de chaque membre ou de chaque terme. Il vient

$$(17) \qquad \frac{d}{dx} = u'\frac{d}{du} + v'\frac{d}{dv} + w'\frac{d}{dw};$$

ce qui peint vivement aux yeux que la dérivée en x, ou le $\frac{d}{dx}$, d'une fonction de u, v, w quelle qu'elle soit, s'obtient en prenant de cette fonction le $\frac{d}{du}$, le $\frac{d}{dv}$, le $\frac{d}{dw}$, c'est-à-dire les dérivées en u, v, w, puis en les multipliant respectivement par u', v', w' et faisant la somme.

Pour indiquer la dérivée seconde, on appliquera donc cette règle à la dérivée première exprimée par le second membre de (16), en mettant respectivement les deux membres de (17) devant les membres correspondants de (16); et l'on aura

$$(18) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(u'\frac{d}{du} + v'\frac{d}{dv} + w'\frac{d}{dw}\right)\left(u'\frac{df}{du} + v'\frac{df}{dv} + w'\frac{df}{dw}\right).$$

Ainsi l'on devra, pour obtenir y'', prendre la dérivée par rapport à u, la dérivée par rapport à v et la dérivée par rapport à w de chacun des termes qui composent la dernière parenthèse, puis multiplier respec-

tivement ces dérivées par u', v', w' et faire la somme. Dans chaque différentiation partielle, le terme différentié, produit de deux facteurs, donnera généralement naissance à deux termes; car on aura, par exemple,

$$\frac{d}{du}\left(u'\frac{df}{du}\right) = u'\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{du'}{du}\frac{df}{du}, \quad \frac{d}{du}\left(v'\frac{df}{dv}\right) = v'\frac{d^2 f}{du\, dv} + \frac{dv'}{du}\frac{df}{dv}, \quad \ldots$$

Toutefois, ce dédoublement n'aura pas lieu quand l'un des facteurs ne contiendra pas la variable u, v ou w par rapport à laquelle on différentie actuellement. C'est ce qui arrivera notamment pour les facteurs u', v', w', si on se les représente, comme on le fait d'ordinaire, fonctions explicites de la variable indépendante seule $u = x$; car leurs dérivées en v, w sont alors nulles et leurs dérivées en u, identiques aux dérivées secondes complètes u'', v'', w'', dont la première se trouve, en outre, réduite à zéro par ce fait que l'hypothèse $u = x$ donne $u' = 1$, $u'' = 0$.

En appliquant de même, aux deux membres de (18), la règle de différentiation exprimée par (17), on obtiendra pour la dérivée troisième la formule

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^3 y}{dx^3} = \left(u'\frac{d}{du} + v'\frac{d}{dv} + w'\frac{d}{dw}\right)&\left(u'\frac{d}{du} + v'\frac{d}{dv} + w'\frac{d}{dw}\right) \\ &\left(u'\frac{df}{du} + v'\frac{df}{dv} + w'\frac{df}{dw}\right); \end{aligned} \right.$$

d'où l'on passera pareillement aux dérivées quatrième, cinquième, etc.

On voit par les détails précédents combien seront longs généralement, dès le second ordre, les développements de ces dérivées, développements où pourront figurer toutes les dérivées partielles de l'ordre correspondant et des ordres moindres de la fonction f. Aussi importe-t-il de bien comprendre les formules symboliques, déduites de (17), qui les expriment d'une manière condensée.

On pourrait d'ailleurs, de toutes ces formules, effacer les lettres y et f, comme on les a effacées de (16), sauf à inscrire à la fin de leurs deux membres, dans chaque application particulière qu'on en fera, la fonction dont on devra prendre la dérivée qu'elles indiquent. Elles deviendront alors plus complètement symboliques encore, ou ne représenteront qu'un certain enchaînement d'opérations, portant sur une quantité dont la désignation restera libre.

Observons enfin que la variable indépendante x pourrait aussi figurer explicitement dans la fonction f, à côté des variables dépendantes v, w, sans y être désignée par une lettre spéciale. Seulement, il faudrait alors, comme il a été dit à la fin du n° 35 (p. 83) pour le premier ordre, éviter de confondre les dérivées partielles de f obte-

nues sans faire varier v ni w, ou en ne les faisant varier qu'à leur tour et indépendamment de x $\left(\text{comme dans } \frac{d^2f}{dx\,dv}\right)$, avec les dérivées *complètes* y'', y''', ... A cet effet, on désignera ces dernières par $\frac{d_c^2}{dx^2}$, $\frac{d_c^3}{dx^3}$, ... conformément à la notation indiquée au n° 35 pour la *différentielle première complète;* et les expressions ordinaires $\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx\,dv}$, ... serviront exclusivement pour les dérivées partielles.

36. — **Dérivées d'ordre supérieur des fonctions implicites.**

Si y désigne une variable dépendant de x, toute fonction composée de la forme $F(x, y)$ rentrera évidemment dans le type $F(u, v)$, avec $u = x$, $v = y$; de sorte que la formule symbolique de différentiation (17) deviendra

$$\frac{d_c}{dx} = \frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy}. \tag{20}$$

En se représentant y' exprimé au moyen de x seul, pour n'avoir pas à lui attribuer d'autres dérivées successives que les complètes y'', y''', ..., la dérivée première $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y'$ sera encore une certaine fonction de x et de y, vu que y' s'y trouvera considéré comme une fonction explicite de x et que $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ y seront des fonctions explicites de x et de y. Donc la même règle s'y appliquera et donnera la dérivée seconde, puis la dérivée troisième, etc. En effectuant finalement les différentiations indiquées, il viendra

$$\tag{21}\left\{\begin{aligned}
\frac{d_cF}{dx} &= \left(\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy}\right)F = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y', \\
\frac{d_c^2F}{dx^2} &= \left(\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y'\right) \\
&= \left(\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}y' + \frac{d^2F}{dy^2}y'^2\right) + \frac{dF}{dy}y'', \\
\frac{d_c^3F}{dx^3} &= \left(\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}y' + \frac{d^2F}{dy^2}y'^2 + \frac{dF}{dy}y''\right) \\
&= \left(\frac{d^3F}{dx^3} + 3\frac{d^3F}{dx^2dy}y' + 3\frac{d^3F}{dx\,dy^2}y'^2 + \frac{d^3F}{dy^3}y'^3\right) \\
&\qquad + 3\left(\frac{d^2F}{dx\,dy} + \frac{d^2F}{dy^2}y'\right)y'' + \frac{dF}{dy}y''', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Le dernier terme de chacun de ces développements, celui où figure la dérivée de y la plus élevée, de l'ordre même de la dérivée complète évaluée de $F(x, y)$, s'obtient évidemment en différentiant chaque fois, dans le terme $\frac{dF}{dy} y'$ de la dérivée première, le facteur autre que $\frac{dF}{dy}$. Ce dernier terme est donc successivement $\frac{dF}{dy} y'$, $\frac{dF}{dy} y''$, $\frac{dF}{dy} y'''$, ...; et il se trouve toujours du premier degré par rapport à la dérivée correspondante ou la plus élevée y', y'', y''', ...

Cela posé, si y doit être choisi de manière que la fonction $F(x, y)$ se maintienne constante ou, en d'autres termes, si c'est la fonction implicite définie par l'équation $F(x, y) = c$, toutes ces dérivées complètes de F seront nulles; et leurs dernières expressions développées (21), égalées à zéro, puis divisées par $-\frac{dF}{dy}$, donneront immédiatement y', ou y'', ou y''', ..., en fonction explicite et rationnelle des dérivées partielles successives de la fonction F et aussi des dérivées, y', y'', y''', ... moins élevées que celle que l'on considère, dérivées que l'on remplacera par leurs valeurs déjà obtenues de même. On aura ainsi, finalement, toutes ces dérivées, comme on l'a vu au n° 39 (p. 91) pour la première d'entre elles y', en fonction explicite de x, y; et leurs expressions seront rationnelles, non moins que celle de y', si le premier membre de l'équation donnée $F(x, y) = c$ est lui-même rationnel. On pourra donc appliquer aux dérivées d'ordre supérieur d'une fonction implicite toutes les remarques faites au n° 39 à propos de la dérivée première.

Il en sera encore de même si l'on a plusieurs fonctions implicites simultanées y, z, ..., définies par un pareil nombre d'équations de la forme $F(x, y, z, \dots) = c$. La différentiation de celles-ci, en effet, se fera au moyen d'une formule comme

$$(22) \qquad \frac{d_c}{dx} = \frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy} + z'\frac{d}{dz} + \dots;$$

de sorte que, dans les diverses dérivées complètes des fonctions F, les termes qui contiendront les dérivées les plus élevées de y, z, ... seront

$$\frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dz} z' + \dots, \quad \text{ou} \quad \frac{dF}{dy} y'' + \frac{dF}{dz} z'' + \dots, \quad \text{etc.}$$

En égalant ces dérivées complètes à zéro, on aura donc soit en y', z', ..., soit en y'', z'', ..., soit en y''', z''', ..., etc., tout autant de systèmes d'équations du premier degré où les coefficients des incon-

nues seront respectivement les mêmes, comme était celui, $\frac{dF}{dy}$, de la dérivée cherchée de y dans le cas précédent. Et la résolution de ces systèmes d'équations fera connaître y', z', ..., puis y'', z'', ..., puis y''', z''', ..., etc., en fonction rationnelle des dérivées partielles successives des fonctions F.

37*. — Courbure d'une famille de lignes planes.

(Compléments, p. 67*).

38. — Différentiation d'une fonction de fonctions linéaires.

Quand les variables u, v, w d'une fonction composée $y = f(u, v, w)$ dépendent linéairement de la variable indépendante x, ou qu'elles ont des expressions comme

$$u = ax - A, \qquad v = bx - B, \qquad w = cx - C,$$

dans lesquelles a, b, c, A, B, C désignent des constantes, la forme des dérivées d'ordre supérieur de la fonction composée se simplifie beaucoup. En effet, les coefficients u', v', w' du second membre de la formule symbolique (17) se réduisent alors aux constantes a, b, c; et, par suite, les nouvelles différentiations indiquées dans (18), puis dans (19), etc., n'amènent aucun dédoublement de termes, car la dérivée partielle de f figurant dans chacun de ceux qu'on différentie y est le seul facteur variable devant lequel vienne se placer le facteur symbolique $\frac{d}{du}$, ou $\frac{d}{dv}$, ou $\frac{d}{dw}$; tous les autres sortent de ce signe de différentiation, ou se comportent comme ils le feraient, en leur qualité de coefficients constants, si l'expression $a\frac{d}{du} + b\frac{d}{dv} + c\frac{d}{dw}$, qui indique les différentiations à opérer, était un polynôme algébrique à multiplier par l'expression qu'on différentie. L'opération infinitésimale effectuée est donc calquée sur la multiplication des polynômes et se fera, en quelque sorte, mécaniquement, comme cette opération algébrique. Elle se décomposera du moins, de la même manière, en ces opérations élémentaires qui, dans une multiplication, auraient pour but le produit d'un facteur constant par divers facteurs variables de la forme $\frac{d}{du}$, $\frac{d}{dv}$, $\frac{d}{dw}$, mais qui, ici, quoique indiquées tout à fait de même, ont pour but le produit du facteur constant par la dérivée partielle que représentent, en s'agrégeant, ces expressions $\frac{d}{du}$, $\frac{d}{dv}$, $\frac{d}{dw}$, lorsqu'on les fait suivre du nom de la fonction donnée $f(u, v, w)$.

Grâce à cette analogie, les formules (18), (19), ... s'écriront donc

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(a\dfrac{d}{du} + b\dfrac{d}{dv} + c\dfrac{d}{dw}\right)^2 f, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \left(a\dfrac{d}{du} + b\dfrac{d}{dv} + c\dfrac{d}{dw}\right)^3 f, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

expressions dont le développement sera

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = a^2\dfrac{d^2f}{du^2} + b^2\dfrac{d^2f}{dv^2} + c^2\dfrac{d^2f}{dw^2} \\ \qquad + 2bc\dfrac{d^2f}{dv\,dw} + 2ca\dfrac{d^2f}{dw\,du} + 2ab\dfrac{d^2f}{du\,dv}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Elles ressembleront aux puissances successives d'un polynôme.

59*. — Paramètre différentiel du second ordre d'une fonction de point.

(Compléments, p. 70*).

60*. — Signification géométrique et importance de ce paramètre différentiel.

(Compléments, p. 71*).

61*. — Courbure moyenne en un point d'une surface : son expression dans une famille de surfaces.

(Compléments, p. 74*).

62*. — Des changements de variables.

(Compléments, p. 79*).

63*. — Exemples de simplifications produites par de tels changements.

(Compléments, p. 81*).

SEPTIÈME LEÇON.

DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES ET * DES CHANGEMENTS DE CES VARIABLES. *APPLICATIONS AUX FONCTIONS DE POINT ET A L'ISOTROPIE DES CORPS.

64. — Assimilation de plusieurs variables indépendantes à des fonctions arbitraires d'une seule. Différentielles totale et partielles d'une fonction quelconque.

Nous avons eu, plusieurs fois déjà, l'occasion d'observer qu'une fonction de point $u = f(x, y, z)$, dépendant de plusieurs variables x, y, z, devient fonction d'une seule variable, s, lorsqu'on ne l'étudie qu'aux divers points d'une ligne tracée à l'intérieur de l'espace où existe la fonction; car, dans $f(x, y, z)$, les coordonnées x, y, z sont alors fonctions du chemin s compris, le long de cette ligne, depuis une certaine origine jusqu'au point considéré. On peut même, plus généralement, supposer la ligne parcourue par un mobile et prendre pour variable indépendante le temps t écoulé depuis un moment quelconque du mouvement jusqu'à l'instant où le mobile atteint le point (x, y, z). Il est alors évident que, si l'on choisit à volonté la trajectoire décrite et la nature du mouvement, le mobile pourra être à chaque instant n'importe où, surtout si on se le figure passant parfois, sans transition, d'un endroit à un autre, c'est-à-dire brusquement anéanti quelque part et reparaissant aussitôt ailleurs. Donc, même sans employer cette dernière conception (physiquement irréalisable) d'un déplacement instantané fini, x, y, z seront des fonctions de t continues, mais, à cela près, absolument quelconques, ou *arbitraires:* ce qu'elles n'étaient pas entièrement quand le chemin décrit s servait de variable indépendante, vu la relation qui existe (p. 44), dans le parallélépipède ayant à partir du sommet (x, y, z), suivant les sens des axes, les arêtes dx, dy, dz, entre ces arêtes et la diagonale ds émanée du même sommet. Et comme, d'ailleurs, tout point (x, y, z) peut être relié à tout autre par une ligne, ou qu'aucune valeur de la fonction ne sera négligée si l'on se réserve de choisir libre-

ment la manière de faire, avec t, varier x, y, z, on voit que $f(x, y, z)$ pourra être assimilée pleinement à une fonction composée d'une seule variable t, dont les proposées x, y, z deviendront des *fonctions arbitraires*.

En général, que des variables indépendantes x, y, z soient des coordonnées ou non, et qu'elles varient *simultanément* ou *isolément*, elles n'en changeront pas moins toujours d'une certaine manière, qu'on sera, il est vrai, libre de choisir et de modifier à volonté. Donc, dans chaque cas particulier, si x, par exemple, varie, à ses diverses valeurs correspondront certaines valeurs de y et de z, ce qui revient à dire que y, z pourront être regardées comme des fonctions de x; ou si encore, pour plus de symétrie et pour ne pas donner à x plus d'importance qu'à y et à z, on imagine que x, y, z reçoivent ensemble, pendant que le temps t s'écoule, les séries de valeurs qu'on se propose de leur attribuer, x, y, z seront fonctions de la variable auxiliaire t. Ainsi, de toute manière, *plusieurs variables indépendantes* x, y, z *peuvent être regardées comme des fonctions arbitraires d'une seule;* et leurs propres fonctions, *devenues des fonctions composées*, admettent toutes les propriétés générales, dérivant de la graduelle variation, dont jouissent les fonctions composées quand le mode de dépendance mutuelle de leurs variables reste quelconque.

En particulier, si $u = f(x, y, z)$ est l'une d'elles, et que l'on donne à x, y, z de très petits accroissements positifs ou négatifs $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, son accroissement simultané Δu sera, d'après la relation (4) de l'avant-dernière Leçon (p. 82),

$$(1) \qquad \Delta u = \left(\frac{df}{dx} + \varepsilon\right)\Delta x + \left(\frac{df}{dy} + \varepsilon_1\right)\Delta y + \left(\frac{df}{dz} + \varepsilon_2\right)\Delta z,$$

ou bien, avec une erreur relative négligeable,

$$(2) \qquad \Delta u = \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{df}{dy}\Delta y + \frac{df}{dz}\Delta z,$$

tant dans les calculs d'approximation où $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ se trouveront assez voisins de zéro, que dans l'étude de changements infiniment petits où l'on devra ne faire servir cette expression de Δu qu'à l'évaluation de résultats-limites. Bornons-nous à ce second cas, ayant suffisamment traité du premier au n° 36 (p. 83), et, conformément à la notation de Leibnitz, remplaçons les Δ par des d ou les *différences finies* par des *différentielles,* afin de marquer notre intention de faire évanouir finalement $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ pour ne garder que des limites de rapports ou de sommes. La variation Δu, réduite à sa partie *influente*,

sera donc

$$(3) \qquad du = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz.$$

On l'appelle la *différentielle totale* de la fonction u, par opposition aux termes $\frac{df}{dx}dx$, $\frac{df}{dy}dy$, $\frac{df}{dz}dz$, qui la composent, et qu'on appelle les *différentielles partielles de u relatives à x, y ou z*, parce qu'elles sont ce à quoi se réduirait la différentielle totale du si l'on ne faisait varier que x, y ou z. Ainsi, *la différentielle totale ou variation infiniment petite d'une fonction est la somme de ses différentielles partielles, c'est-à-dire des accroissements qu'elle éprouverait si une seule de ses variables indépendantes recevait son accroissement infiniment petit effectif, toutes les autres conservant leurs valeurs antérieures.*

63. — Différentiation des fonctions composées de plusieurs variables indépendantes.

Soit maintenant $w = f(u, v)$ une fonction de plusieurs variables u, v, elles-mêmes fonctions des variables indépendantes x, y, z. Comme celles-ci peuvent être censées dépendre d'une dernière et unique variable t, les précédentes u, v et, par suite, w seront encore des fonctions composées de t. On aura donc

$$dw = \frac{df}{du}du + \frac{df}{dv}dv.$$

Seulement, dans cette formule, du, dv, dw comporteront plusieurs sens; car ce seront des différentielles totales ou des différentielles partielles, suivant qu'on fera varier x, y, z à la fois ou séparément.

Supposons, par exemple, que x seule varie. Alors, en divisant par dx, il viendra

$$(4) \qquad \frac{dw}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx},$$

relation dont on ferait évidemment, en désignant par u'_x, v'_x les dérivées partielles premières de u et v en x, la formule symbolique suivante, propre à différentier par rapport à x toute fonction de u et v,

$$(5) \qquad \frac{d}{dx} = u'_x\frac{d}{du} + v'_x\frac{d}{dv}.$$

Et l'on en aurait d'analogues pour différentier une fonction de u, v par rapport à y ou à z; car il suffirait de remplacer, dans (5), les lettres et les indices x par y ou par z. Afin de réduire la place

qu'occupent de pareilles formules, il nous arrivera quelquefois d'en écrire plusieurs ensemble, en mettant entre parenthèses les lettres qui pourront se substituer respectivement les unes aux autres. Ici, par exemple, la formule (5) et ses deux analogues s'écriront ainsi, toutes à la fois :

$$(5\ bis) \qquad \frac{d}{d(x, y, z)} = (u'_x, u'_y, u'_z)\frac{d}{du} + (v'_x, v'_y, v'_z)\frac{d}{dv}.$$

Elles expriment que *la dérivée d'une fonction composée, par rapport à une variable indépendante, est la somme des produits respectifs de ses dérivées partielles, relatives aux variables dont elle dépend immédiatement, par les dérivées partielles de celles-ci prises par rapport à la variable indépendante considérée.*

On passera, sans difficulté, des dérivées partielles du premier ordre de la fonction $f(u, v)$ à celles d'ordre supérieur, en observant que, dans la formule (4) ou dans d'autres semblables, les dérivées partielles de f en u et v, qui y figurent, sont, comme f, des fonctions explicites de u et v, et se différentieront par les formules symboliques (5 *bis*). On obtiendra, par exemple, la dérivée $\frac{d^2 w}{dx\,dy}$, en différentiant par rapport à y l'expression (4) de $\frac{dw}{dx}$. Comme

$$\frac{d}{dy}\frac{df}{du} = u'_y \frac{d^2 f}{du^2} + v'_y \frac{d^2 f}{du\,dv}$$

et que

$$\frac{d}{dy}\frac{df}{dv} = u'_y \frac{d^2 f}{du\,dv} + v'_y \frac{d^2 f}{dv^2},$$

il viendra, en appelant $u''_{x,y}$, $v''_{x,y}$ les dérivées secondes de u et v en x et y,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx\,dy} = u'_x u'_y \frac{d^2 f}{du^2} + (u'_x v'_y + u'_y v'_x)\frac{d^2 f}{du\,dv} + v'_x v'_y \frac{d^2 f}{dv^2} \\ + \frac{df}{du} u''_{x,y} + \frac{df}{dv} v''_{x,y}. \end{aligned} \right.$$

On trouverait évidemment de même toutes les dérivées partielles secondes en x, y ou z de la fonction composée w, et puis, par la différentiation de celles-ci en x, y ou z, les dérivées partielles troisièmes, etc.

Si, d'ailleurs, les variables indépendantes figuraient au nombre des variables dont dépend explicitement la fonction f, si, par exemple, on avait $u = x$ ou que w fût donné sous la forme $f(x, v)$, il y aurait

lieu de distinguer, par rapport aux variables indépendantes, comme dans les cas où il n'y en avait qu'une, d'une part, des *dérivées purement partielles*, obtenues en faisant, dans la fonction composée f, varier chacune d'elles, x par exemple, toute seule, sans lui permettre d'entraîner dans ses changements les variables de la fonction composée qui, comme v, en dépendent, et, d'autre part, des *dérivées relativement complètes*, qu'on distinguerait au moyen de l'indice c en les écrivant, par exemple, $\frac{d_c f}{dx}$, ou $\frac{d_c f}{dy}$, ... et qui s'obtiendraient en faisant, dans f, varier, *avec* x, *tout ce qui dépend de* x (comme v) ou, *avec* y, *tout ce qui dépend de* y, etc. Ainsi, une fonction de la forme $f(x, y, v)$ donnerait

$$(7) \qquad \frac{d_c f}{dx} = \frac{df}{dx} + v'_x \frac{df}{dv}, \qquad \frac{d_c f}{dy} = \frac{df}{dy} + v'_y \frac{df}{dv}.$$

66. — Différentiation des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes.

Soit, par exemple, $F(x, y, z)$ une fonction composée, où l'on suppose, pour fixer les idées, que z exprime l'ordonnée d'une surface, ordonnée dépendant, d'une manière déterminée, de deux coordonnées horizontales x et y. On convient, dans ce cas, pour abréger l'écriture, de représenter par

p, q, les deux dérivées partielles premières z'_x, z'_y ou $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$,

et par

r, s, t les trois dérivées partielles secondes $\frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dx\,dy}, \frac{d^2 z}{dy^2}$,

dont la première et la troisième s'appellent quelquefois les dérivées secondes *directes*, par opposition à la deuxième, $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$, qui prend alors le nom de *dérivée seconde oblique*.

On aura évidemment, pour différentier autant de fois que l'on voudra en x ou y la fonction F et ses dérivées partielles, qui toutes seront de nouvelles fonctions explicites de x, y et z, les deux formules symboliques

$$(8) \qquad \frac{d_c}{dx} = \frac{d}{dx} + p\frac{d}{dz}, \qquad \frac{d_c}{dy} = \frac{d}{dy} + q\frac{d}{dz}.$$

En observant que p et q ou z'_x et z'_y dépendent, comme z, de x et

de y seuls, et ont pour dérivées partielles, d'une part, r et s par rapport à x, d'autre part, s et t par rapport à y, il viendra successivement

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d_x F}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}p, \qquad \frac{d_y F}{dy} = \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}q;\\
&\frac{d_x^2 F}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx} + p\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}p\right)\\
&\qquad = \frac{d^2F}{dx^2} + 2p\frac{d^2F}{dx\,dz} + p^2\frac{d^2F}{dz^2} + \frac{dF}{dz}r,\\
&\frac{d^2 F}{dx\,dy} = \left(\frac{d}{dy} + q\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz}\right)\\
&\qquad = \left(\frac{d}{dx} + p\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz}\right)\\
&\qquad = \frac{d^2F}{dx\,dy} + q\frac{d^2F}{dx\,dz} + p\frac{d^2F}{dy\,dz} + pq\frac{d^2F}{dz^2} + \frac{dF}{dz}s,\\
&\frac{d_y^2 F}{dy^2} = \left(\frac{d}{dy} + q\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz}\right)\\
&\qquad = \frac{d^2F}{dy^2} + 2q\frac{d^2F}{dy\,dz} + q^2\frac{d^2F}{dz^2} + \frac{dF}{dz}t;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Dans ces développements, le dernier terme, celui qui contiendra la dérivée de z la plus élevée, aura toujours été déduit du terme $\frac{dF}{dz}p$ ou $\frac{dF}{dz}q$ de l'une des deux dérivées premières, en y différentiant chaque fois le second facteur p ou q, et non le premier $\frac{dF}{dz}$; en sorte que, d'une part, *cette dérivée partielle la plus élevée de z figurant dans l'équation s'y trouvera au premier degré*, et que, d'autre part, elle aura pour coefficient $\frac{dF}{dz}$. Elle indiquera, d'ailleurs, autant de différentiations de z, en x ou en y, qu'on en aura effectué sur la fonction même F.

Cela posé, admettons que z doive varier, avec x et y, de telle manière, que la fonction F se maintienne constante. Autrement dit, supposons que z soit la fonction implicite de x et de y définie par l'équation $F(x, y, z) = c$. Toutes les dérivées complètes de F par rapport à x ou par rapport à y seront nulles : et l'on aura, pour déterminer p et q, les deux équations du premier degré obtenues en annulant les derniers membres des deux premières formules (9), où

figurent isolément p et q; puis, pour obtenir r, s, t, celles du même degré, résolubles encore chacune séparément, que donnent les derniers membres des trois formules suivantes (9) égalés à zéro; et ainsi de suite.

Les dérivées premières p et q, puis les dérivées secondes r, s, t, dans les expressions desquelles on remplacera p et q par leurs valeurs déjà trouvées, etc., s'exprimeront donc rationnellement, au moyen des dérivées partielles successives, d'ordres de plus en plus élevés, de la fonction $F(x, y, z)$. Si celle-ci est, par exemple, un polynôme, comme il arrive quand il s'agit d'une surface algébrique dont l'équation a été mise sous forme entière, on obtient ainsi $p, q, r, s, t, \ldots$, sous la forme de fonctions rationnelles des coordonnées x, y, z du point considéré de la surface. Les dérivées premières p et q de z en x et en y égalent, en particulier, les deux quotients respectifs de $-\frac{dF}{dx}$ et $-\frac{dF}{dy}$ par $\frac{dF}{dz}$, comme on l'avait déjà reconnu, d'une manière plus géométrique, dans l'avant-dernière Leçon (p. 49*).

Ainsi s'étendent, aux dérivées partielles successives des fonctions implicites de plusieurs variables, les propriétés que nous avions constatées dans les fonctions implicites d'une seule variable. Et il serait aisé de reconnaître, en procédant comme on l'a fait au n° 56 [p. 111, formule (22)], que le même fait persiste dans le cas de plusieurs fonctions implicites simultanées. La différentiation en x ou y, etc., répétée un nombre quelconque de fois, de chacune des équations définissant ces fonctions implicites et en même nombre qu'elles, donne toujours un système d'équations du premier degré par rapport aux dérivées inconnues analogues, les plus élevées qui y figurent, de ces diverses fonctions; et chaque inconnue a dans tous les systèmes, pour coefficients respectifs, les dérivées premières $\left(\text{comme } \frac{dF}{dz}\right)$, par rapport à la fonction implicite correspondante, des premiers membres des équations proposées.

Il y a parfois des simplifications, provenant de ce que certaines dérivées partielles des premiers membres de ces équations s'annulent. Par exemple, pour la sphère dont l'équation est $x^2+y^2+z^2=c$, on aura, en différentiant soit par rapport à x, soit par rapport à y, et divisant par 2,

$$(10) \qquad x+zp=0, \qquad y+zq=0,$$

résultats dont les premiers membres ne contiennent pas explicitement

l'un y, l'autre, x. De nouvelles différentiations en x et y donneront donc simplement

$$(11)\qquad 1+p^2+zr=0,\quad qp+zs=0,\quad pq+zs=0,\quad 1+q^2+zt=0;$$

et il viendra, en utilisant d'abord les équations (10), puis les équations (11),

$$(12)\qquad \begin{cases} p=-\dfrac{x}{z}, & q=-\dfrac{y}{z}, \\ r=-\dfrac{x^2+z^2}{z^3}, \quad s=-\dfrac{xy}{z^3}, & t=-\dfrac{y^2+z^2}{z^3}, \end{cases}$$

valeurs rationnelles, mais qui cesseraient de l'être si, voulant les rendre explicites en x et y, on remplaçait z par son expression $\pm\sqrt{c-x^2-y^2}$ tirée de l'équation de la surface.

67*. — Changement des variables.

(Compléments, p. 86*).

68*. — Exemple, dans un cas où l'on ne change pas toutes les variables indépendantes.

(Compléments, p. 89*.)

69*. — Expressions diverses du paramètre différentiel du second ordre d'une fonction de point.

(Compléments, p. 92*.)

70*. — Des fonctions de point rapportées à divers systèmes de coordonnées rectilignes.

(Compléments, p. 96*.)

71*. — Analogie des formules de transformation pour les dérivées et pour les coordonnées, quand les axes sont rectangulaires.

(Compléments, p. 97*.)

72*. — De l'utilité de cette analogie pour simplifier l'équation de certains phénomènes naturels.

(Compléments, p. 101*.)

73*. — Exemples, dans la théorie d'un faisceau de droites et dans celle des petites déformations des corps, de changements portant non seulement sur les variables, mais aussi sur les fonctions.

(Compléments, p. 103*.)

74*. — Changements infiniment petits d'axes coordonnés rectangles : leur réduction à trois rotations élémentaires.

(Compléments, p. 108*.)

75*. — Des effets que produisent ces changements sur les expressions dépendant de fonctions de point ou de leurs dérivées partielles prises dans les sens des axes.

(Compléments, p. 113*.)

76*. — Application à l'isotropie des corps.

(Compléments, p. 115*.)

HUITIÈME LEÇON.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL : ÉLIMINATION DES CONSTANTES ET * DES FONCTIONS ARBITRAIRES PAR LA DIFFÉRENTIATION, D'OÙ SE DÉDUISENT CERTAINES PROPRIÉTÉS POUR LES FAMILLES DE FONCTIONS; * ÉTUDE DES FONCTIONS HOMOGÈNES THÉORÈME DE CAUCHY SUR LE RAPPORT DES ACCROISSEMENTS SIMULTANÉS DE DEUX FONCTIONS, ET SON EMPLOI, PRINCIPALEMENT DANS LE CALCUL DES EXPRESSIONS DE FORME INDÉTERMINÉE.

---

77. — Élimination des constantes arbitraires par la différentiation et formation d'une équation différentielle convenant à toute une famille de fonctions ou de courbes.

Les Leçons précédentes contiennent l'exposé de tous les principes généraux du Calcul différentiel; le reste de ce calcul consiste en *applications* de la méthode, qualifiées respectivement d'*analytiques* ou de *géométriques* suivant qu'elles paraissent tenir davantage de l'Algèbre ou de la Géométrie, mais qui, toutes, comportent une interprétation géométrique nécessaire pour les bien saisir. Je commencerai par les applications analytiques et, d'abord, par celle qui sert, en quelque sorte, de transition entre les principes mêmes de l'Analyse infinitésimale et ses applications : c'est l'*élimination* des constantes *par la différentiation* et la formation d'*équations, différentielles* ou *aux dérivées partielles,* communes à toute une *famille* de fonctions.

Concevons qu'une infinité de fonctions y de x soient définies par une même équation, de la forme $\varphi(x, y) = c$, où c désigne un paramètre variable avec continuité quand on passe d'une de ces fonctions à ses voisines; par exemple, $c = \varphi(x, y)$ exprimera, dans le plan des xy, une fonction de point, et les fonctions y de x considérées seront celles que définissent, par la relation existant entre leur ordonnée et leur abscisse, les diverses courbes sur lesquelles $\varphi(x, y)$ reste invariable. Alors toutes les fonctions y de x, ou les courbes les représentant, sont dites appartenir à une même *famille,* qu'elles composent par leur ensemble. L'équation $\varphi(x, y) = c$, différentiée le long de ces

courbes, donne évidemment $\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}y' = 0$, relation d'où la constante c a disparu, mais où figure, outre x et y, la dérivée y'. Cette relation s'appelle l'*équation différentielle* de la famille donnée de fonctions ou de courbes : elle détermine, en fonction des coordonnées x, y de chaque point du plan, la pente y' qu'y présente celle des courbes de la famille qui y passe; et elle exprime ainsi une propriété commune à toutes les fonctions y données, car, en éliminant c, on a fait disparaître ce qui distinguait ces fonctions les unes des autres.

Nous verrons dans le Calcul intégral que l'équation de la famille, prise soit sous la forme $\varphi(x, y) = c$, soit sous toute autre et notamment sous une forme explicite en y, comme $y = f(x, c)$, s'appelle l'*intégrale générale* de l'équation différentielle.

Par exemple, l'équation différentielle $y' = 2y$ caractérise la famille de fonctions dont la formule est $y = ce^{2x}$; car, si l'on conçoit pour un instant que, dans celle-ci, c désigne non pas une constante, mais une fonction quelconque de x, en sorte que le produit ce^{2x} puisse exprimer lui-même telle fonction de x que l'on voudra, la dérivée y' de ce produit sera évidemment $c'e^{2x} + 2ce^{2x}$, et il viendra bien, comme condition pour qu'elle se réduise à $2y$ ou à $2ce^{2x}$, $c' = 0$, c'est-à-dire $c = \text{const}$. Effectivement, l'équation $y = ce^{2x}$ avec c constant, mise sous la forme $ye^{-2x} = c$, donne de suite, en supprimant, après différentiation, le facteur commun e^{-2x} (différent de zéro), $y' - 2y = 0$.

Ainsi, la différentiation suffit pour éliminer une constante c, quand l'équation d'où l'on part est résolue par rapport à cette constante, ou, du moins, quand c s'y trouve *séparé* de x et de y, c'est-à-dire quand les termes où c figure ne contiennent ni x ni y. Il n'en est plus tout à fait de même dans le cas contraire où l'équation proposée a la forme $F(x, y, c) = 0$ et où c entre dans la relation $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0$. Mais la différentiation, en fournissant cette dernière relation, donne encore la possibilité d'obtenir, entre x, y et y', l'équation différentielle de la famille; car il suffira, pour l'avoir, qu'on sache éliminer c, en tirant, par exemple, sa valeur de la proposée $F(x, y, c) = 0$ pour la substituer dans $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0$.

Il est bon d'observer que l'équation différentielle existe, même quand la famille des fonctions y n'est pas exprimable algébriquement ou analytiquement et, par suite, ne comporte pas les sortes d'élimination qu'enseigne l'Algèbre. Cette famille pourrait n'être définie que d'une manière empirique, comme on se représente, par exemple, l'ensemble

des lignes ou des stries, recouvrant tout un sol plan, qu'une infinité de petits corps durs, en glissant à sa surface, y auraient tracées. En chaque point (x, y) d'un tel plan serait ainsi marquée ou parfaitement définie la direction d'une strie : ce qui revient bien à dire que le coefficient angulaire y' de la tangente à la famille formée par ces courbes égalerait une fonction déterminée, purement empirique il est vrai, des deux coordonnées x, y du point de contact, et que, par conséquent, les courbes admettraient une certaine équation différentielle commune.

De même, leurs ordonnées y n'en continueraient pas moins à être exprimables par le symbole $f(x, c)$. Car on pourrait distinguer les diverses courbes les unes des autres au moyen d'un numéro d'ordre positif ou négatif inscrit sur chacune d'elles, les numéros successifs $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ correspondant à des courbes assez voisines chacune de la suivante, et des numéros fractionnaires, aussi peu différents les uns des autres qu'on le voudrait, étant consacrés aux courbes intercalées entre celles-là ; de façon que le numéro d'ordre des courbes devînt une variable indépendante, un *paramètre* c continu. Cette sorte de graduation serait d'ailleurs arbitraire, dans les limites compatibles avec la continuité ; et l'on aurait la liberté de l'effectuer d'après toute circonstance *quantitative* offerte par les courbes. On pourrait, par exemple, prendre pour c l'*ordonnée à l'origine* des diverses courbes, c'est-à-dire la distance, à l'origine, du point où elles coupent l'axe des y ; etc. Il est clair que y, variant d'une abscisse à l'autre et d'une courbe à l'autre, serait bien une *certaine* fonction f (seulement empirique) de x et de c. Et, de même, c, numéro d'ordre ou paramètre de la courbe passant par un point donné (x, y), serait bien déterminé dès qu'on donnerait x et y, ou serait bien une *certaine* fonction de point, $\varphi(x, y)$, encore purement empirique.

Si l'équation donnée entre x et y contenait plusieurs paramètres et représentait ainsi ce qu'on peut appeler une multiple infinité de fonctions y de x (savoir, une infinité distincte pour chaque paramètre qu'on ferait varier), on la différentierait successivement autant de fois qu'il y aurait de ces paramètres, en introduisant ainsi, outre la dérivée première y', les dérivées suivantes y'', y''', ..., jusqu'à celle dont l'ordre égalerait le nombre des paramètres ; et l'élimination des constantes entre les relations obtenues de la sorte et la proposée donnerait, en x, y, y', y'', y''', ... ce qu'on appelle une équation différentielle *d'ordre supérieur*, c'est-à-dire contenant des dérivées plus élevées que la première. Cette équation exprimerait évidemment une propriété commune à la multiple infinité de fonctions dont il s'agit.

Il pourrait arriver encore que l'on eût plusieurs fonctions, y, z, u, ..., de x et, par exemple, d'un nombre égal de paramètres entrant, chacun, dans l'expression de toutes les fonctions. Alors la dérivée de y, par exemple, dépendrait généralement de tous ces paramètres, et, en y substituant leurs valeurs (en x, y, z, u, ...) déduites des équations données qui définiraient les fonctions y, z, u, ..., on obtiendrait une relation entre la dérivée y' et x, y, z, u, ... Comme il en viendrait une analogue pour z', une autre pour u', etc., on aurait finalement, par la réunion de toutes ces relations entre y', z', u', ... et x, y, z, u, ..., ce qu'on appelle un *système d'équations différentielles* : ces équations *simultanées*, ne contenant plus les paramètres, exprimeraient un certain ensemble de propriétés communes à la multiple infinité des fonctions y, z, u, ...

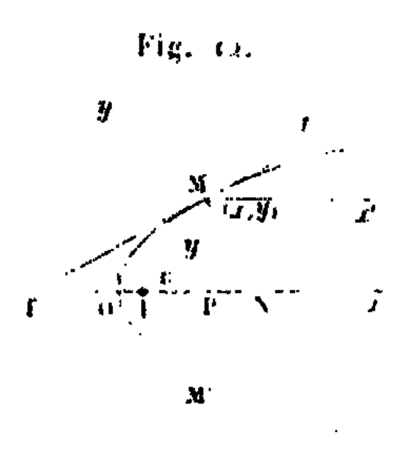
78. — Exemples : propriété des tangentes ou des normales commune à toute une famille de courbes.

Dans le cas simple d'une relation, $F(x, y, c) = 0$, entre les coordonnées rectangulaires x et y des divers points d'une famille de courbes planes, l'équation différentielle, de la forme $f(x, y, y') = 0$, à laquelle on parvient, fait dépendre de la situation (x, y) de chaque point du plan la pente, y', de la tangente menée en ce point à la courbe qui y passe et, par suite, celle de la normale correspondante. Elle exprime donc une propriété générale de la tangente ou de la normale à la famille de courbes, et l'on conçoit qu'elle comporte parfois une interprétation géométrique facile, où figureront, par exemple, soit les longueurs de la *tangente* ou de la *normale*, supposées tirées depuis le point de contact (x, y) jusqu'à l'axe des abscisses, soit leurs projections sur cet axe appelées respectivement *sous-tangente* et *sous-normale*, etc. Les expressions, nécessaires à connaître pour une telle interprétation, de ces deux dernières lignes TP, NP se rapportant (*fig.* 12 ci-après) à un point quelconque M d'une courbe M'M, s'obtiennent aisément. Si l'on mène, en M, la tangente tMT, ainsi que la normale MN, la pente, $y' = \tang x'$MT, de la tangente n'est autre, par définition, que le rapport $\frac{\text{MP}}{\text{TP}}$ ou $\frac{y}{\text{TP}}$, égal au rapport $\frac{\text{PN}}{\text{MP}}$ ou $\frac{\text{PN}}{y}$, à cause de la propriété dont jouit la hauteur $\text{MP} = y$ du triangle rectangle TMN, abaissée sur l'hypoténuse TN, d'être moyenne proportionnelle entre les deux segments de celle-ci. Ainsi l'on a de suite

$$\text{sous-normale PN} = yy' \qquad \text{et} \qquad \text{sous-tangente TP} = \frac{y}{y'}.$$

Voici deux exemples :

1° Considérons la famille de courbes $y^2 = 2cx$, formée de toutes les paraboles, comme M'OM, qui ont leur sommet à l'origine et leur foyer F sur l'axe des x, paraboles dont une passe toujours par un point quelconque M(x, y) du plan. L'équation $y^2 = 2cx$, différentiée et divisée par 2, donne $yy' = c$, c'est-à-dire, d'après une formule qu'on vient d'établir, PN $= c$, propriété connue de la sous-normale. Éliminons c, en portant, par exemple, sa valeur yy' dans l'équation $\frac{y^2}{c} = 2x$ de la famille. Il viendra, pour l'équation différentielle cherchée,


Fig. 12.

$$\frac{y}{y'} = 2x, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \text{TP} = 2\,\text{OP}.$$

Donc la propriété commune à toutes les paraboles de la famille donnée consiste en ce que leurs sous-tangentes TP et, par suite, leurs tangentes TM sont coupées en leur milieu par l'axe des ordonnées y, qui est la tangente à leur sommet.

2° Soit, comme second exemple, la famille des cercles d'un même rayon R, dont les centres sont sur l'axe des x. Leur équation est, en prenant pour paramètre c l'abscisse du centre,

$$(x-c)^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

La différentiation donne, en divisant par 2, $x - c + yy' = 0$, et il vient enfin par l'élimination de c, ou mieux de $x - c$,

$$y^2y'^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Telle est l'équation différentielle cherchée. Or, d'après une démonstration pour laquelle nous nous sommes servi de la figure précédente, mais reconnue applicable à toute courbe, yy' exprime la sous-normale PN se rapportant au point M dont MP $= y$ est l'ordonnée, et, par suite, l'expression $y^2y'^2 + y^2$ n'est autre que $\overline{PN}^2 + \overline{PM}^2$, somme égale au carré $\overline{MN}^2$ de la normale, dans le triangle rectangle MPN. Donc, l'équation différentielle du problème actuel revient à écrire $\overline{MN}^2 = R^2$ ou MN $=$ R : elle signifie que les cercles considérés admettent pour propriété commune d'avoir toutes leurs normales de même longueur et égales au rayon constant de ces cercles.

79*. — Élimination, par la différentiation, de fonctions arbitraires, et formation d'équations aux dérivées partielles qui expriment une propriété du plan tangent commune à toute une classe de surfaces, comprenant une infinité de familles, ou une propriété de toute une classe de fonctions de plusieurs variables indépendantes.

(Compléments, p. 131*).

80*. — Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes et autres propriétés générales de ces fonctions.

(Compléments, p. 132*).

81*. — Propriété particulière aux fonctions homogènes et entières du second degré : loi curieuse de réciprocité qui en résulte pour les déplacements intérieurs d'équilibre d'un corps élastique soumis à diverses actions.

(Compléments, p. 135*).

82. — Autre application analytique du Calcul différentiel : vraies valeurs des expressions de forme indéterminée.

Passons à une autre série d'applications analytiques du Calcul différentiel, savoir, l'évaluation des expressions de forme indéterminée.

Les plus simples de ces expressions se présentent quand on étudie le quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ de deux fonctions données $f(x)$, $\varphi(x)$ et que, pour une certaine valeur $x=a$ de la variable, les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ s'annulent à la fois. Le quotient devient donc $\frac{0}{0}$; et l'on sait que, par lui-même, il est susceptible de recevoir toutes les valeurs imaginables, car toutes, multipliées par le diviseur zéro, reproduisent bien le dividende o. Mais l'expression dont il s'agit, $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$, n'est pas considérée seule; elle doit [p. 38] pouvoir figurer dans la suite des valeurs de la fonction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, et, comme il est naturel [p. 5] de supposer *continues* les fonctions toutes les fois qu'il n'y a pas à cela impossibilité absolue, on sera tenu de n'attribuer à $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ qu'une valeur ne différant pas d'une manière appréciable de celles que prend la fonction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ à l'approche de $x=a$, pourvu cependant que celles-ci diffèrent elles-mêmes de moins en moins les unes des autres. Autrement dit, toutes les fois que la fonction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tendra vers une limite à mesure que x s'appro-

chera de a, cette limite, *seule*, sera la *vraie valeur* de la fraction $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$, et il y aura lieu de la chercher.

Un des disciples immédiats de Leibnitz, le marquis de L'Hôpital, a donné, pour cela, dans les cas où les dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$ sont continues tout près de $x = a$, une règle très simple, généralement suffisante. Elle consiste à remplacer, pour $x = a$, le rapport des deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ par celui de leurs dérivées $f'(x)$ et $\varphi'(x)$. S'il arrivait que celles-ci s'annulassent elles-mêmes pour $x = a$, on appliquerait à leur rapport la même règle, après avoir, bien entendu, supprimé de $f'(x)$ et de $\varphi'(x)$ les facteurs communs qui pourraient s'y trouver en évidence; et ainsi de suite.

On déduit d'ordinaire cette règle d'un théorème, dû à Cauchy, relatif au rapport des accroissements simultanés de deux fonctions, et qui constitue une généralisation importante de la formule fondamentale du n° **10** (p. 35). Commençons donc par faire connaître ce théorème.

83. — Théorème de Cauchy sur le rapport des accroissements simultanés de deux fonctions.

Quand deux fonctions continues $f(x)$, $\varphi(x)$ ont leurs dérivées premières $f'(x)$, $\varphi'(x)$ continues entre deux valeurs $x=a$, $x=a+h$ de la variable, et quand, de plus, l'une de ces fonctions y varie constamment dans un même sens, sans que sa dérivée, tout en pouvant s'annuler aux limites, s'annule dans l'intervalle, le rapport des accroissements totaux correspondants des deux fonctions égale le rapport de leurs dérivées pour une valeur intermédiaire de la variable.

En d'autres termes, si θh désigne une fraction inconnue de h, ou θ un certain nombre compris entre zéro et 1, l'on aura

$$(11) \qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}.$$

Intercalons, en effet, entre a et $a+h$, un nombre indéfiniment croissant de valeurs de x, que j'appellerai $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, en réservant les dénominations x_0 et x_n pour la première, a, et pour la dernière, $a+h$. De l'une de ces valeurs à la suivante, $f(x)$ et $\varphi(x)$ éprouveront des accroissements ayant les expressions générales $\Delta f(x)$, $\Delta\varphi(x)$, et dont les rapports respectifs, à dénominateurs $\Delta\varphi(x)$ tous de même signe par hypothèse, seront

$$(12) \qquad \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)}, \quad \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta\varphi(x_1)}, \quad \frac{\Delta f(x_2)}{\Delta\varphi(x_2)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta f(x_{n-1})}{\Delta\varphi(x_{n-1})}.$$

Donc le rapport

$$\frac{\Delta f(x_0) + \Delta f(x_1) + \ldots + \Delta f(x_{n-1})}{\Delta \varphi(x_0) + \Delta \varphi(x_1) + \ldots + \Delta \varphi(x_{n-1})} \quad \text{ou} \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{\varphi(a+h) - \varphi(a)},$$

formé par l'addition terme à terme des précédents, se trouvera compris, d'après un théorème d'Algèbre appliqué déjà plusieurs fois (p. 12), entre le plus petit et le plus grand d'entre eux. Et comme enfin, à mesure que Δx s'approche de zéro, l'expression $\frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)}$, quotient de $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ par $\frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}$, tend évidemment vers $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, ou que les rapports (12) deviennent à la limite les diverses valeurs de la fonction $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ pour x variable entre a et $a+h$, on voit que le rapport proposé $\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}$ sera compris entre la plus petite et la plus grande de ces valeurs de $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. D'ailleurs, vu la continuité de $f'(x)$, $\varphi'(x)$, et la non-annulation de $\varphi'(x)$ *entre* les limites $x=a$, $x=a+h$, la fraction $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ne va de l'une de ses valeurs, la plus petite ou la plus grande, à l'autre, qu'en passant par tous les états de grandeur intermédiaires; et il y a, par conséquent, un moment où elle égale $\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}$. Si l'on appelle $a+\theta h$ la valeur de x à ce moment, il viendra bien l'égalité (11) [1].

---

[1] La formule (11) s'étend aux cas où aucune des deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ ne varie toujours dans un même sens et où, par conséquent, leurs deux dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$, changeant de signe, s'annulent dans l'intervalle considéré, pourvu toutefois que ce ne soit pas en même temps. On le reconnaît en considérant la fonction continue

$$f(x) - f(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}\,[\varphi(x)-\varphi(a)],$$

qui, nulle identiquement aux deux limites $x=a$, $x=a+h$, exige que sa dérivée (continue)

$$f'(x) - \frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}\,\varphi'(x)$$

change de signe et, par conséquent, s'annule, *dans l'intervalle*, c'est-à-dire pour une valeur de x exprimable par $a+\theta h$. On a donc

$$f'(a+\theta h) - \frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}\,\varphi'(a+\theta h) = 0.$$

Or cette égalité n'est possible qu'avec $\varphi'(a+\theta h)$ différent de zéro, si l'on admet

84. — Démonstration de la règle relative aux expressions de la forme $\frac{0}{0}$; cas d'exception ou comportant des difficultés spéciales.

Cela posé, si, pour la valeur a de la variable, les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ s'annulent, que, de plus, l'accroissement h doive tendre vers zéro et puisse être supposé assez petit pour que la dérivée de l'une, au moins, des deux fonctions ait sans cesse le même signe entre $x = a$ et $x = a + h$, la formule (11) donnera

$$(13) \qquad \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}.$$

Admettons que le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tende, comme il arrive d'ordinaire, vers une limite lorsque x tend vers a. Alors, quand h s'approchera graduellement de zéro, θh, d'une valeur absolue moindre, tendra vers zéro soit graduellement, soit peut-être, dans certains cas, en sautant parfois brusquement d'une valeur absolue à une autre sensiblement plus petite. Quoi qu'il en soit, le second membre ne pourra éviter de converger vers $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$; ce qui démontre la règle.

Mais il peut se faire que, x s'approchant graduellement de a, $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ oscille une infinité de fois entre des limites plus ou moins écartées, ou ne tende vers aucune limite, et que cependant le second membre de (13) admette une limite déterminée; car rien n'empêche, quand h décroît vers zéro avec continuité, que θh varie brusquement de temps à autre, de manière à réduire toute la suite des valeurs prises par le second membre de (13) à une minime partie seulement de celles qu'on aurait en y faisant décroître θh d'une manière continue. Il est clair que, dans

---

que $f'(a+\theta h)$ et $\varphi'(a+\theta h)$ ne puissent pas être nuls à la fois. Donc, *à cette réserve près*, on peut diviser par $\varphi'(a+\theta h)$, et il vient

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a-\theta h)},$$

ce qui est bien la formule de Cauchy. Nous n'aurons à l'appliquer que dans des cas où la dérivée $\varphi'(x)$ ne s'annulera pas entre les deux limites $x = a$, $x = a + h$; et voilà pourquoi il suffisait d'en indiquer ici, en note, l'extension à d'autres cas, pour lesquels la nécessité d'examiner la restriction encore subsistante (au moins d'après la démonstration) de la non-annulation simultanée de $f'(x)$ et de $\varphi'(x)$ rendrait peut-être son emploi moins utile.

ce cas, la règle usuelle tombera en défaut, car $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$, ou $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, tendra vers une limite, et non $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. On ne pourra donc pas ramener le rapport des deux fonctions $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ à celui de leurs dérivées, qui, réellement indéterminé pour $x=a$, sera seulement astreint par l'équation (13) à comprendre parmi ses valeurs possibles en nombre infini celle qui égale $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$.

Un exemple curieux de ce cas se présente quand on pose

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\qquad \varphi(x)=x\qquad \text{et}\qquad a=0;$$

ce qui donne bien $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$, et fait d'ailleurs varier $f(x)$, $\varphi(x)$ avec continuité, même à la limite $x=0$ où le facteur $\sin\frac{1}{x}$, devenu $\sin\infty$, bien que toujours compris entre -1 et $+1$, cesse de varier graduellement. Les deux dérivées $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ sont alors

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\cos\frac{1}{x}-2x\sin\frac{1}{x},\quad \varphi'(x)=1.$$

La seconde est constante, et la première $f'(x)$, réduite sensiblement à $-\cos\frac{1}{x}$ pour les valeurs ε de x très voisines de zéro, est continue dès que x diffère de zéro, c'est-à-dire *entre* la limite $x=0$ et une autre quelconque, bien qu'elle cesse de l'être pour $x=0$, où la rapidité de ses variations de ∓ 1 à ± 1 est infinie. D'après la démonstration donnée tout à l'heure de la formule (11), cela suffira pour qu'on puisse appliquer cette formule (11); car la continuité de $f(x)$ et de $\varphi(x)$, encore subsistante *même* pour $x=a$, permet de négliger sans erreur relative sensible, dans les petits accroissements simultanés $f(a+h)-f(a)$ et $\varphi(a+h)-\varphi(a)$, les éléments $\Delta f(x)$, $\Delta\varphi(x)$ les plus proches de cette limite a où les dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$ ne sont plus toutes les deux graduellement variables et bien déterminées. Rien donc n'empêche de regarder la valeur limite de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ comme égale à $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, ou à $-\cos\frac{1}{x}$, pour une valeur ε de x infiniment voisine de zéro. Mais on voit que $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, alors devenu $-\cos\frac{1}{\varepsilon}$ ou $-\cos\infty$, est discontinu, et indéterminé entre -1 et $+1$, tandis que le vrai

quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, évidemment égal à $x \sin\frac{1}{x}$, admet la valeur unique zéro à l'instant où x s'annule.

Quand les dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$ deviennent infinies à la limite $x=a$, la règle subsiste; ce que montre encore la réflexion précédente sur la possibilité d'abstraire, des accroissements $f(a-h)-f(a)$ et $\varphi(a+h)-\varphi(a)$, les éléments $\Delta f(x)$, $\Delta\varphi(x)$ les plus proches de cette limite a. Seulement le rapport cherché des dérivées se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, non moins indéterminée que $\frac{0}{0}$ et à laquelle, comme on verra bientôt, la même règle est applicable. Mais on pourra utiliser directement ce résultat $\frac{\infty}{\infty}$, si la valeur infinie des deux termes de la fraction est due à la présence d'un facteur commun indéfiniment grandissant, qu'il suffira de supprimer. Soit, par exemple, $f(x)=\sqrt{x-1}$, $\varphi(x)=\sqrt{x^2-1}$ et $a=1$, d'où résulte bien pour $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ la forme $\frac{0}{0}$. Il viendra $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $\varphi'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, valeurs que rend infinies, pour $x=1$, le facteur $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Mais leur quotient peut s'écrire $\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}=\frac{1}{2x}\sqrt{x+1}$, et vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $x=1$: résultat qu'on aurait eu de suite en observant que $\varphi(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}=\sqrt{x+1}\,f(x)$ et que, par suite, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ a pour expression $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ou se réduit à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ quand $x=1$.

83. — Application de la règle à un exemple.

Habituellement, le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ des dérivées tend vers une limite plus facile à calculer que la vraie valeur de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ cherchée directement, et la règle aboutit.

Soit, comme exemple, à évaluer la fraction

$$(14)\qquad \frac{(e^x-e^{-x})-x(e^x+e^{-x})}{2\sin x-2x\cos x}\quad\text{ou}\quad\frac{\sinh x-x\cosh x}{\sin x-x\cos x}$$

à la limite $x=0$. C'est ce qu'on indique d'ordinaire en mettant l'expression considérée entre parenthèses et, à la suite, sous forme d'indice, la valeur qu'on se propose de donner à x, de l'une des deux

manières suivantes :

$$\left(\frac{\sinh x - x\cosh x}{\sin x - x\cos x}\right)_{x=0} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\sinh x - x\cosh x}{\sin x - x\cos x}\right)_0.$$

Les deux termes de la fraction s'annulant pour $x = 0$, on remplacera chaque terme par sa dérivée, qui est, après une réduction évidente, $-x\sinh x$ pour le numérateur et $x\sin x$ pour le dénominateur. On pourra donc évaluer, au lieu du rapport proposé (14), celui des deux fonctions $-x\sinh x$ et $x\sin x$, rapport identique, vu la suppression permise du facteur commun x, à $\frac{-\sinh x}{\sin x}$. Celui-ci devenant lui-même de la forme $\frac{0}{0}$ à la limite considérée, on y remplacera les deux termes par leurs propres dérivées $-\cosh x$, $\cos x$, dont le quotient, pour $x = 0$, est -1, vraie valeur cherchée.

Toute la suite des calculs se représente par un Tableau comme ceci :

$$\left(\frac{\sinh x - x\cosh x}{\sin x - x\cos x}\right)_0 = \left(\frac{-x\sinh x}{x\sin x}\right)_0 = -\left(\frac{\sinh x}{\sin x}\right)_0 = -\left(\frac{\cosh x}{\cos x}\right)_0 = -1.$$

On vérifierait aisément le résultat -1 en remplaçant, dans les deux termes de la seconde fraction (14), les sinus et cosinus, tant circulaires qu'hyperboliques, par leurs développements ordonnés suivant les puissances de x, puis en réduisant les termes semblables, supprimant ensuite un facteur x^3 commun aux deux séries ainsi obtenues comme numérateur et comme dénominateur, puis, finalement, en posant $x = 0$.

86. — Expressions de la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Les fractions $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *qui, pour une valeur particulière* $x = a$ *de la variable, prennent la forme* $\frac{\infty}{\infty}$, *ont leur vraie valeur, ou valeur limite, évaluable par la même règle que les expressions de la forme* $\frac{0}{0}$, *c'est-à-dire en remplaçant* $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *par* $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Les deux limites ainsi substituées l'une à l'autre sont, du moins, ou nulles à la fois, ou finies et égales, ou, toutes les deux, infinies et de même signe. Cette extension importante de la règle relative au rapport de deux fonctions qui s'annulent a été découverte par Cauchy.

Pour la démontrer, donnons à x une valeur $a + h$ voisine de celle, a, qui rend infinies $f(x)$, $\varphi(x)$, et substituons à la fraction proposée

$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$, ou $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, le quotient équivalent de la fonction $\frac{1}{\varphi(x)}$, nulle pour $x=a$, par la fonction $\frac{1}{f(x)}$, également nulle à la même limite. Ces deux fonctions continues s'approchent évidemment de zéro et varient toujours dans un même sens, quand les valeurs absolues de $f(x)$ et $\varphi(x)$ grandissent ou que $x=a+h$ tend vers a. Le rapport de leurs accroissements simultanés $\frac{1}{\varphi(a+h)}-\frac{1}{\varphi(a)}$ et $\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}$, réduit ainsi à $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$, égalera, d'après le théorème de Cauchy, le rapport de leurs dérivées

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\varphi(x)}=-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2},\qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)}=-\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

c'est-à-dire la fraction

$$\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2,$$

pour une certaine valeur intermédiaire $a+\theta h$ de la variable. On aura donc

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{\varphi'(a+\theta h)}{f'(a+\theta h)}\left[\frac{f(a+\theta h)}{\varphi(a+\theta h)}\right]^2,$$

ou, sous forme de proportion,

$$(15)\qquad \frac{\dfrac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}}{\dfrac{f(a+\theta h)}{\varphi(a+\theta h)}}=\frac{\dfrac{f(a+\theta h)}{\varphi(a+\theta h)}}{\dfrac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}}.$$

Or admettons que chacun des deux rapports $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tende vers une limite quand x approche de a, et que, pour $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, cette limite soit, ou finie et différente de zéro, ou nulle, ou infinie.

Dans le premier cas, la relation (15) devient évidemment, pour $h=0$,

$$\frac{\lim\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}}{\lim\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}=\frac{\lim\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}{\lim\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}=1,\qquad\text{ou}\qquad \lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans le second cas, θh étant plus voisin de zéro que n'est h, le se-

cond membre de (15) a son numérateur $\frac{f(a+\theta h)}{\varphi(a+\theta h)}$ au moins aussi voisin, en général, de sa limite nulle, que n'est le dénominateur correspondant $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$; d'où il suit que ce second membre (d'ailleurs positif) atteint, à la limite, tout au plus l'unité. Donc la limite du numérateur du premier membre, $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, ne peut pas dépasser en valeur absolue celle du dénominateur $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, alors nulle ; et l'on a bien encore

$$\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

en ce sens du moins qu'elles sont nulles toutes les deux. Mais leur rapport limite peut évidemment être très inférieur à l'unité ; car rien n'empêche que le second membre de (15) tende vers zéro avec h, la fraction $\frac{f(a+\theta h)}{\varphi(a+\theta h)}$ pouvant devenir indéfiniment plus proche de la limite zéro que $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$.

Enfin, dans le troisième cas, où $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ est infinie, le second membre de (15) a, pour la même raison, son numérateur $\frac{f(a+\theta h)}{\varphi(a+\theta h)}$ moins éloigné de sa limite infinie, c'est-à-dire plus grand en valeur absolue que le dénominateur $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$. Le rapport, évidemment positif, de ces deux très grandes valeurs de la fonction supposée continue $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, dépasse donc l'unité. Par suite, le premier membre égal montre que $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ a le signe de $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ et n'a pas une valeur absolue moindre ou est tout aussi infinie. On conçoit même que $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ puisse être un infini d'un ordre plus élevé ; car rien ne dit que le second membre de (15) ne grandisse pas sans limite à mesure que h tend vers zéro.

En résumé, le calcul de $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, pour $x = a$, donnera la vraie valeur de $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ quand celle-ci sera finie ; et, quand elle sera infinie, il le fera connaître.

Observons seulement que, lorsque les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$

deviennent infinies pour une valeur déterminée a de la variable, leur rapidité d'accroissement, mesurée par leurs dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$, le devient à plus forte raison, et que, par conséquent, l'expression $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ est, comme la proposée $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Mais cela tient assez souvent à des facteurs infinis communs qu'on aperçoit de suite dans $f'(x)$, $\varphi'(x)$, et qu'on peut supprimer; en sorte que la règle conduit bien alors au résultat demandé. D'ailleurs, il arrive fréquemment que la valeur a pour laquelle les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ deviennent infinies n'est pas une valeur déterminée, mais bien une valeur infinie. Or les dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$ ne sont alors nullement tenues de devenir infinies, c'est-à-dire que le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ peut ne plus se présenter sous la forme illusoire $\frac{\infty}{\infty}$ du proposé $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; et, cependant, la règle de Cauchy continue à s'y appliquer, comme on va le voir.

87. — Extension de la règle au cas où c'est pour une valeur infinie de la variable que les termes de la fraction considérée deviennent tous les deux nuls ou tous les deux infinis.

Admettons que ce soit pour $x = \infty$, ou bien pour $x = -\infty$, que $f(x)$ et $\varphi(x)$ acquièrent à la fois ou des valeurs nulles ou des valeurs infinies. Alors, en appelant y l'inverse de x, ces fonctions, devenues $f\left(\frac{1}{y}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{y}\right)$, devront être considérées pour la valeur parfaitement précise et déterminée $y = 0$, valeur inverse de $x = \pm\infty$. On pourra donc, avec la nouvelle variable y, appliquer la règle, et remplacer le rapport des deux fonctions $f\left(\frac{1}{y}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{y}\right)$, par celui de leurs dérivées $f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{-1}{y^2}\right)$, $\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{-1}{y^2}\right)$. La suppression du facteur commun $\frac{-1}{y^2}$, infini à la limite, donnera bien

$$(16) \qquad (\text{pour } y = 0) \qquad \lim \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)},$$

ou, en revenant à la variable proposée x,

$$(17) \qquad (\text{pour } x = +\infty \text{ ou } -\infty) \qquad \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

La règle qui consiste à remplacer un rapport $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ de deux fonctions par celui de leurs dérivées est donc encore applicable quand ces deux formes $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ ne se présentent pas pour une valeur déterminée de la variable, mais seulement à la limite lorsque la valeur absolue de la variable croît indéfiniment.

88. — Exemple : comparaison d'exponentielles et de logarithmes devenant infinis aux fonctions algébriques de leur variable qui le deviennent également.

Comme application, cherchons la limite du rapport $\frac{\log x}{x^m}$, où m désigne un exposant positif quelconque, entier ou fractionnaire, et x une variable qui grandit indéfiniment. Les deux fonctions $f(x) = \log x$ et $\varphi(x) = x^m$ devenant infinies pour $x = \infty$, il y a lieu d'évaluer le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ qui, vu les valeurs $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi'(x) = m x^{m-1}$, revient à $\frac{1}{m x^m}$. On aura donc

$$(18) \qquad \left(\frac{\log x}{x^m}\right)_{x=\infty} = \left(\frac{1}{m x^m}\right)_{x=\infty} = \frac{1}{\infty} \quad \text{ou} \quad 0.$$

Ainsi, *quand une variable devient infinie, son logarithme le devient, mais infiniment moins que toute puissance, à exposant positif, de cette variable, et, par suite, infiniment moins que toute fonction algébrique, indéfiniment croissante, de la même variable.* Effectivement, toute fonction entière de x est sensiblement réductible à son terme de l'ordre le plus élevé, quand la valeur absolue de x devient très grande, et, s'il s'agit d'une fonction fractionnaire ou même irrationnelle, des divisions ou des extractions de racines, effectuées sur de pareils monômes, donnent des résultats monômes comme eux, c'est-à-dire de la forme x^m, abstraction faite d'un facteur constant.

Dans la formule (18), appelons y le nombre indéfiniment croissant $\log x$, ou posons $\log x = y$, $x = e^y$; et appelons de plus n l'inverse de m, c'est-à-dire le nombre positif quelconque $\frac{1}{m}$. L'expression $\frac{\log x}{x^m}$ deviendra $\frac{y}{e^{my}} = \left(\frac{y^n}{e^y}\right)^m$. La formule (18), qui exprime que ce nombre tend vers zéro quand y grandit, exige évidemment que sa puissance $n^{\text{ième}}$ y tende aussi, ou qu'on ait

$$(19) \qquad \left(\frac{y^n}{e^y}\right)_{y=\infty} = 0.$$

Donc, *quand une variable, y ou x, devient infinie, toute puissance à exposant positif, de cette variable le devient aussi, mais infiniment moins que l'exponentielle correspondante e^y ou e^x.*

C'est ce qu'aurait montré plus directement, s'il ne s'était agi d'appliquer la règle de Cauchy, le développement en série, (13), de e^x [p. 50], visiblement composé, pour $x > 0$, de termes positifs de tous les ordres entiers de grandeur en x, jusqu'à l'infini. Et la relation (18), $\left(\frac{\log x}{x^m}\right)_{x=\infty} = 0$, se serait alors déduite de (19), qui n'en est, comme on a vu, qu'une autre forme. On n'a donc pas à craindre que les résultats précédents soient subordonnés à l'hypothèse, faite en démontrant la règle de Cauchy, de l'existence d'une limite du rapport proposé $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ $\left(\text{qui est } \frac{\log x}{x^m} \text{ dans notre exemple}\right)$ à l'instant où x atteint la valeur rendant infinis les deux termes de ce rapport.

Il suit de là que si, pour les très grandes valeurs de x, on représente les fonctions positives $\log x$ et e^x par une expression de la forme x^α, en posant ainsi $x^\alpha =$ soit $\log x$, soit e^x, c'est-à-dire, vu dès lors l'égalité du logarithme naturel de x^α à celui de $\log x$ ou de e^x,

$$\alpha \log x = \text{soit } \log\log x, \quad \text{soit } x,$$

les valeurs de l'exposant α, savoir, $\frac{\log\log x}{\log x}$ ou $\frac{\log y}{y}$ dans le premier cas, et $\frac{x}{\log x}$ ou $\frac{e^y}{y}$ dans le second, deviendront, l'une, nulle et, l'autre, infinie, quand x croîtra indéfiniment. Donc *le logarithme d'une variable infiniment grande peut être remplacé par une puissance de cette variable ayant son exposant positif infiniment petit, et l'exponentielle (à base e) de la même variable peut être remplacée par une puissance de cette variable dont l'exposant positif deviendrait infini.*

Cette remarque est précieuse dans l'étude des expressions de forme indéterminée où soit des exponentielles, soit des logarithmes, se trouvent combinés avec des facteurs algébriques; car elle sert à y lever l'indétermination, en montrant que les facteurs algébriques l'emportent infiniment sur les logarithmes, devenus des facteurs algébriques à exposants infiniment petits, et que, au contraire, les exponentielles, assimilables à des facteurs algébriques à exposants infinis, l'emportent infiniment sur les facteurs algébriques donnés. On peut d'ailleurs, au signe près, ramener sous ce rapport le logarithme infini négatif d'une variable qui s'annule à celui d'une variable qui

devient infinie; car on a $-\log x = \log\frac{1}{x}$ et, pour x nul ou $\frac{1}{x}$ infini, la formule $\log\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$, où α est un infiniment petit ε, donne $-\log x = x^{-\varepsilon}$. On voit de suite, par exemple, que, à la limite $x = 0$, le produit $-x^m \log x$ devient $x^{m-\varepsilon}$ et, par conséquent, s'annule si l'exposant donné m surpasse zéro, quoique le second facteur $\log x$ devienne infini.

89. — Autres expressions de forme indéterminée.

On ramène à l'une des deux formes $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ une troisième catégorie d'expressions d'apparence indéterminée que l'on exprime par $0\times\infty$, et qui se présentent dans les produits $f(x)$, $\varphi(x)$ de deux fonctions dont l'une, $f(x)$, s'annule, à l'instant où l'autre, $\varphi(x)$, devient infinie. Il suffit, pour réduire cette catégorie aux précédentes, de remplacer l'une des deux fonctions par son inverse, écrit en dénominateur sous l'autre fonction.

C'est ainsi, par exemple, qu'on ramènerait le produit $x\log x$, pour $x = 0$, au quotient $\dfrac{\log x}{\frac{1}{x}}$, revenant, avec $\frac{1}{x} = y$, à la fraction $-\dfrac{\log y}{y}$ prise pour y infini : résultat nul d'après la formule (18), comme on vient d'ailleurs de le voir. On ramènerait de même l'expression $\left[x\left(\sqrt[x]{A}-1\right)\right]_{x=\infty}$, où A est censé désigner un nombre positif quelconque, expression de la forme $\infty(1-1)$ ou $\infty\times 0$, à la fraction $\left(\dfrac{A^y-1}{y}\right)_{y=0}$, de la forme $\dfrac{1-1}{0}$ ou $\dfrac{0}{0}$, et pour laquelle le rapport des dérivées donne $\left(\dfrac{A^y\log A}{1}\right)_{y=0} = \log A$. On aura donc

$$(20) \qquad \left[x\left(\sqrt[x]{A}-1\right)\right]_{x=\infty} = \log A,$$

conformément à la formule de Briggs (portant le n° 14 à la page 51), qui est en quelque sorte la définition du logarithme naturel, considéré comme limite d'expressions algébriques.

Enfin, une dernière classe assez usuelle d'expressions d'apparence indéterminée se présente dans des exponentielles à base variable, ou de la forme $f(x)^{\varphi(x)}$, quand l'exposant $\varphi(x)$ devient infini pour une valeur de x rendant la base $f(x)$ égale à l'unité, ou quand, au contraire, l'exposant $\varphi(x)$ s'annule à un instant où la base $f(x)$ est nulle ou infinie. Il s'agit donc des formes 1^∞, 0^0, ∞^0. Cette catégorie se

ramène à la précédente en considérant, au lieu de la fonction $f(x)^{\varphi(x)}$, son logarithme $\varphi(x)\log f(x)$, qui devient alors $\infty \times 0$, ou $0 \times \infty$, et d'où l'on passe aisément à la quantité qui l'a pour logarithme. Par exemple, la vraie valeur de x^x à la limite $x = 0$ s'obtiendra en considérant son logarithme $x \log x$, alors nul, comme on vient de le trouver : cette vraie valeur de x^x sera donc e^0, c'est-à-dire 1. De même, la vraie valeur de $\left[\left(1 - \frac{A}{x}\right)^x\right]_{x=\infty}$ aura pour logarithme

$$\left[x \log\left(1 - \frac{A}{x}\right)\right]_{x=\infty} = \left[\frac{\log(1 + Ay)}{y}\right]_{y=0},$$

ou simplement A, vu que cette fraction a la forme $\frac{0}{0}$ et que le rapport des dérivées y est $\left(\frac{A}{1 + Ay}\right)_{y=0} = A$. On aura donc

$$(21) \qquad \left[\left(1 - \frac{A}{x}\right)^x\right]_{x=\infty} = e^A,$$

conformément à la formule (4) de la page 42, formule qui définit la fonction exponentielle comme limite de fonctions algébriques.

90*. — Application du théorème de Cauchy à l'étude des rapports existant entre les tangentes, très éloignées, d'une branche infinie de courbe, et son asymptote.

(Compléments, p. 128*.)

NEUVIÈME LEÇON.

SUITE DES APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL : DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES ENTIÈRES; FORMULES DE TAYLOR ET DE MAC LAURIN; DÉVELOPPEMENT DE $(a+b)^m$, ETC.

---

91. — Objet et importance de la formule de Taylor.

La propriété de graduelle variation dont jouissent, en général, les fonctions même les plus compliquées se présentant dans l'étude des phénomènes naturels, a pour effet d'assujettir leur marche à des lois approchées uniformes, toutes les fois qu'on ne les considère qu'entre des limites suffisamment resserrées. S'il est question, par exemple, de ne donner à la variable d'une fonction $f(x)$, à partir d'une certaine valeur fixe, d'ailleurs quelconque, x, que d'assez petits accroissements positifs ou négatifs h, les valeurs correspondantes $f(x+h)$ de la fonction vaudront, d'après la formule du haut de la page 36, $f(x)+f'(x)h+\varepsilon h$, et comporteront ainsi l'expression approchée, du premier degré en h, $f(x)+f'(x)h$, avec une erreur, εh, d'un ordre de petitesse par rapport à h supérieur au premier. Or il est naturel de chercher à généraliser ce résultat et de se demander si, en prenant pour expression approchée de $f(x+h)$ un polynôme $\varphi(h)$ du $n^{\text{ième}}$ degré en h,

$$(1)\qquad \varphi(h)=A_0+\frac{A_1}{1}h+\frac{A_2}{1.2}h^2+\frac{A_3}{1.2.3}h^3+\ldots+\frac{A_n}{1.2.3\ldots n}h^n,$$

on ne pourrait pas de même, par un choix convenable de ses coefficients A_0, $\frac{A_1}{1}$, $\frac{A_2}{1.2}$, ..., $\frac{A_n}{1.2.3\ldots n}$, réduire la différence entre $f(x+h)$ et ce polynôme $\varphi(h)$ à une expression de la forme εh^n, où ε tendrait vers zéro en même temps que h; de sorte que l'erreur commise fût, pour h assez voisin de zéro, incompamerablent plus petite que le dernier terme $\frac{A_n}{1.2.3\ldots n}h^n$, toutes les fois que A_n différerait de zéro. Et l'on conçoit d'ailleurs que, en donnant alors à n des valeurs de plus

en plus élevées, le polynôme $\varphi(h)$ pourrait bien sous certaines conditions, par le fait du décroissement indéfini du *reste* ou terme *complémentaire* εh^n, devenir, à la limite, une série convergente, rendant praticables l'étude et même le calcul numérique de fonctions $f(x+h)$ très difficiles peut-être à aborder autrement. De plus, cette forme d'un polynôme, la plus simple que l'Algèbre fournisse, ainsi imposée à toutes les fonctions jouissant d'une variabilité assez graduelle, impliquerait pour toutes, comme il vient d'être dit, l'existence de propriétés communes, du moins dans le voisinage de l'une quelconque de leurs valeurs prise comme point de départ, et elle mettrait ces propriétés en évidence. Tel est précisément le but capital que remplit la formule de Taylor, à laquelle sera consacrée cette Leçon.

92. — Du contact de deux fonctions : conditions pour qu'un tel contact soit d'un ordre donné n.

Comme la différence, que nous aurons à considérer, des deux fonctions $f(x+h)$, $\varphi(h)$ devra, pour les très petites valeurs absolues de h, être d'un ordre de petitesse en h supérieur au $n^{\text{ième}}$, il y a lieu d'indiquer d'abord ce que nous appellerons un *contact* plus ou moins *élevé* de deux fonctions. Nous dirons que deux fonctions de h présentent, pour la valeur $h=0$ par exemple, un contact de l'ordre entier n (au moins égal à 1), lorsque leur différence, que j'appellerai $\psi(h)$, devient, dans le voisinage de cette valeur $h=0$, d'un ordre de petitesse en h supérieur au $n^{\text{ième}}$, mais non supérieur au $(n+1)^{\text{ième}}$. Le rapport de $\psi(h)$ à h^n doit donc tendre vers zéro avec h, mais non le rapport de $\psi(h)$ à h^{n+1}.

Or il suit de là que les dérivées successives des deux fonctions proposées, jusqu'aux $n^{\text{ièmes}}$ inclusivement, sont, pour n nul, égales chacune à chacune, ou, ce qui revient au même, que celles de leur différence $\psi(h)$, savoir $\psi'(h), \psi''(h), \ldots, \psi^{(n)}(h)$, s'annulent comme $\psi(h)$ à la même limite $h=0$. Pour le démontrer, attribuons d'abord à la variable h des valeurs croissantes à partir de zéro, et imaginons, en vue de fixer les idées, que la différence $\psi(h)$ devienne alors positive, ce qui aura lieu si celle des deux fonctions proposées qu'on a retranchée de l'autre est la plus petite des deux dans les conditions supposées. L'écart positif $\psi(h)$ des deux fonctions aura, d'après l'hypothèse, avec h^n, un rapport tendant vers zéro en même temps que h, et, par conséquent, inférieur à tel petit nombre positif qu'on voudra, pourvu que h reste lui-même assez petit. Il viendra, tout à la fois, en appelant $\frac{\varepsilon}{1.2.3\ldots n}$

ce nombre,

$$(2)\qquad \psi(h) > 0, \qquad \psi(h) - \varepsilon\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} < 0.$$

Ainsi, les premiers membres de ces inégalités, d'abord nuls, vont, l'un, en grandissant, l'autre, en diminuant, et, si l'on admet qu'ils soient continus ou que $\psi(h)$ le soit, leurs dérivées ne pourront manquer d'être, l'une, positive, l'autre, négative. On aura donc

$$(3)\qquad \psi'(h) > 0, \qquad \psi'(h) - \varepsilon\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} < 0,$$

inégalités semblables aux précédentes et montrant que la dérivée $\psi'(h)$ s'annule, comme $\psi(h)$, à la limite $h=0$. On en déduira de même successivement, si les fonctions $\psi'(h)$, $\psi''(h)$, ..., $\psi^{(n-1)}(h)$ sont continues,

$$(4)\qquad \begin{cases} \psi''(h) > 0, \qquad \psi''(h) - \varepsilon\dfrac{h^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi^{(n-1)}(h) > 0, \qquad \psi^{(n-1)}(h) - \varepsilon\dfrac{h}{1} < 0, \\ \psi^{(n)}(h) > 0, \qquad \psi^{(n)}(h) - \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Comme le nombre ε doit tendre vers zéro en même temps que la valeur la plus grande considérée de h, on voit que ces inégalités exigent bien, en somme, l'annulation de $\psi(0)$, $\psi'(0)$, $\psi''(0)$, ..., $\psi^{(n)}(0)$, c'est-à-dire l'égalité, pour $h=0$, des deux fonctions proposées dont $\psi(h)$ exprime la différence, et de leurs n premières dérivées, comparées chacune à chacune.

On arriverait à la même conclusion en attribuant à h, toujours à partir de zéro, des valeurs négatives; ce qui ne changerait rien à la première inégalité (2) en choisissant encore convenablement celle des deux fonctions $f(x+h)$, $\varphi(h)$ dont $\psi(h)$ exprimerait l'excédent sur l'autre, mais ce qui, dans le cas de n impair, conduirait, en posant la seconde inégalité (2), à prendre ε négatif, pour que le produit εh^n continuât à être positif. Seulement, h diminuant, les fonctions croissantes auraient alors des dérivées négatives, et les fonctions décroissantes, des dérivées positives; ce qui conduirait à changer, d'une ligne de formules à la ligne suivante, le sens des inégalités. Chacune des dérivées $\psi'(h)$, $\psi''(h)$, ..., $\psi^{(n)}(h)$ n'en serait pas moins comprise entre zéro et une limite tendant vers zéro avec h.

Ainsi, *un contact d'ordre n de deux fonctions exige non seulement leur égalité actuelle, mais aussi celle de leurs dérivées successives, chacune à chacune, jusqu'aux $n^{\text{ièmes}}$ inclusivement.*

Réciproquement, *si les deux fonctions proposées et leurs n premières dérivées sont égales chacune à chacune, pour une valeur déterminée de leur variable,* et que, par suite, en comptant les petits accroissements h à partir de cette valeur, la différence des deux fonctions, que j'appellerai encore $\psi(h)$, mais prise avec son signe et non pas seulement en valeur absolue, vérifie les $n+1$ conditions $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=0$, $\psi''(0)=0$, ..., $\psi^{(n)}(0)=0$, *ces deux fonctions présenteront, pour la valeur considérée de leur variable, un contact d'un ordre au moins égal à n.*

En effet, concevant d'abord que h croisse depuis zéro jusqu'à une valeur positive non plus seulement très petite, mais quelconque [afin d'établir en même temps, entre des limites aussi écartées qu'on le voudra, une formule, nécessaire plus loin, de la différence $\psi(h)$ des deux fonctions], appelons m la plus petite, et M la plus grande des valeurs que reçoit dans cet intervalle la dérivée $\psi^{(n)}(h)$, m et M remplaçant ainsi les deux limites zéro et ε de $\psi^{(n)}(h)$ considérées dans la démonstration précédente. On aura évidemment, au lieu de la dernière ligne des inégalités (4),

$$(5)\qquad \psi^{(n)}(h)-m>0,\qquad \psi^{(n)}(h)-\mathrm{M}<0.$$

Or les premiers membres de celles-ci sont les dérivées des deux fonctions $\psi^{(n-1)}(h)-m\frac{h}{1}$ et $\psi^{(n-1)}(h)-\mathrm{M}\frac{h}{1}$. De ces deux fonctions, nulles par hypothèse initialement ou pour $h=0$, la première grandit donc avec h, tandis que la seconde diminue, pourvu toutefois que l'une et l'autre soient continues; et il vient, à la place de l'avant-dernière ligne des inégalités (4),

$$(6)\qquad \psi^{(n-1)}(h)-m\frac{h}{1}>0,\qquad \psi^{(n-1)}(h)-\mathrm{M}\frac{h}{1}<0.$$

On observera de même que les premiers membres de celles-ci sont les dérivées de $\psi^{(n-2)}(h)-m\frac{h^2}{1.2}$ et de $\psi^{(n-2)}(h)-\mathrm{M}\frac{h^2}{1.2}$, etc.; et une série de raisonnements analogues donnera finalement

$$(7)\qquad \psi(h)-m\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}>0,\qquad \psi(h)-\mathrm{M}\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}<0.$$

Donc le rapport de $\psi(h)$ à $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$ se trouve compris entre la plus petite, m, et la plus grande, M, des valeurs reçues par la dérivée $n^{\text{ième}}$ $\psi^{(n)}(h)$ pendant que h, d'abord nul, a graduellement atteint son état actuel. Et le même raisonnement, sauf le changement de sens des

inégalités dans le passage d'une ligne de formules à l'autre, s'appliquera évidemment au cas de valeurs négatives ou décroissantes de h.

Or admettons la continuité non seulement de $\psi(h)$ et de ses $n-1$ premières dérivées, ce que nous avons dû faire déjà, mais aussi de la dérivée $n^{\text{ième}}$ $\psi^{(n)}(h)$. Alors, pour h assez petit, les valeurs particulières m et M ne pourront manquer d'être aussi voisines que l'on voudra de $\psi^{(n)}(0)$, qui égale zéro par hypothèse; et le rapport de $\psi(h)$ à $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$, compris entre m et M, tendra aussi vers zéro avec h. Cela prouve bien que $\psi(h)$ sera d'un ordre de petitesse en h supérieur au $n^{\text{ième}}$, ou que les deux fonctions proposées auront un contact d'un ordre au moins égal à n.

Il n'est pas indifférent [pour arriver de suite à l'expression de $\psi(h)$ annoncée tout à l'heure] de remarquer que la fonction continue $\psi^{(n)}(h)$, entre les deux instants où elle égale m et M, passe par toutes les valeurs intermédiaires, et que, en particulier, à un certain moment, où sa variable peut être représentée par θh si θ est une fraction (inconnue) de l'unité ou θh une fraction de h, elle égale le rapport, que l'on a en vue, de $\psi(h)$ à $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$. Il vient donc

$$(8)\qquad \psi(h) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\,\psi^{(n)}(\theta h).$$

Enfin, *le contact des deux fonctions proposées atteindra justement l'ordre n, sans le dépasser, si leurs dérivées $(n+1)^{\text{ièmes}}$, pour $h=0$, sont différentes.* Car alors la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$, $\psi^{(n+1)}(h)$, de leur différence, ne s'annulera pas à la limite $h=0$ et ne pourra manquer, entre cette limite et une autre assez voisine, de garder son signe, avec des valeurs notables. En appelant respectivement α, β la plus petite et la plus grande de ces valeurs, on aura donc les inégalités

$$\psi^{(n+1)}(h) - \alpha > 0, \qquad \psi^{(n+1)}(h) - \beta < 0.$$

Or, grâce à la continuité supposée de $\psi(h)$ et de ses n premières dérivées, on remontera de ces deux inégalités, par le procédé suivi pour passer de (5) à (7), jusqu'à deux relations comme

$$\psi(h) - \alpha\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} > 0, \qquad \psi(h) - \beta\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} < 0,$$

prouvant bien que le rapport de $\psi(h)$ à h^{n+1} est compris entre deux nombres, $\frac{\alpha}{1.2.3\ldots(n+1)}$ et $\frac{\beta}{1.2.3\ldots(n+1)}$, de même signe et de

grandeur sensible, ou que $\psi(h)$ n'est pas d'un ordre de petitesse, en h, supérieur au $(n+1)^{\text{ième}}$.

On voit même que, si la dérivée $\psi^{(n+1)}(h)$ est continue ou prend seulement le même signe de part et d'autre de la valeur $h=0$, c'est-à-dire pour h négatif que pour h positif, le rapport de $\psi(h)$ à h^{n+1} aura toujours ce signe, comme α et β, dans le voisinage de $h=0$; et que, par suite, $\psi(h)$ changera de signe en même temps que h, ou n'en changera pas, suivant que l'exposant $n+1$ sera impair ou pair. *Quand* donc *le contact est d'un ordre n pair, celle des deux fonctions proposées qui se trouve plus grande que l'autre un peu avant le moment où elles atteignent leur valeur commune devient la plus petite aussitôt après ce moment : elle reste, au contraire, la plus grande au delà comme en deçà, quand l'ordre du contact est impair.*

Il peut arriver que deux fonctions, parfaitement distinctes d'ailleurs, aient un contact d'ordre infini pour certaines valeurs de la variable et que, par conséquent, toutes leurs dérivées soient momentanément égales chacune à chacune. Ce fait se produit à l'instant où $x=0$, comme l'a reconnu Cauchy, dans la fonction $y=0$ comparée à l'exponentielle $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$, qui, nulle au moment considéré où $x=0$, grandit avec la valeur absolue de x en tendant pour $x=\pm\infty$ vers la limite supérieure 1. Les dérivées successives de cette exponentielle,

$$y'=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\qquad y''=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\quad \ldots,$$

se composent évidemment de termes qui, tous, la contiennent multipliée par une puissance de $\frac{1}{x}$ à exposant entier et positif. En faisant $\frac{1}{x^2}=u$, ces termes sont donc, au coefficient près, de la forme $u^m e^{-u}=\frac{u^m}{e^u}$, où l'exposant m est un multiple positif de $\frac{1}{2}$; et l'on a vu (p. 139) qu'une telle expression tend vers zéro quand u grandit ou quand x s'approche de zéro. Ainsi, à la limite $x=0$, toutes les dérivées successives de l'exponentielle proposée s'annulent comme l'exponentielle elle-même; et celle-ci a bien alors un contact d'ordre infini avec la fonction $y=0$.

Il en serait de même de l'exponentielle $y=e^{-\frac{1}{x}}$, si l'on y considérait seulement, dans le voisinage de $x=0$, les valeurs positives ou croissantes de x; car, pour les valeurs négatives, l'exponentielle et

toutes ses dérivées deviendraient non pas nulles, mais infinies, à la limite $x = 0$.

La nature réalise parfois, autant que nous pouvons en juger, de tels contacts, d'ordre infini, entre les fonctions qui représentent deux phénomènes se succédant en un même endroit, ou deux phases consécutives d'un même phénomène régies par deux lois différentes; car il est des cas où elle paraît employer, en quelque sorte, tout son art à ménager les transitions et les raccordements (par exemple, dans la mise en mouvement d'une masse fluide au moyen des frottements qu'y provoque le contact d'une paroi plane, animée à partir d'un certain moment de vitesses tangentes à son propre plan).

93. — Formule et série de Taylor; cas généraux de convergence.

Nous savons maintenant que, pour réduire à une expression de la forme εh^n la différence entre une fonction proposée $f(x+h)$ et le polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré $\varphi(h)$ défini par la formule (1) [p. 142], il suffit d'égaler, à la limite $h=0$, ces deux fonctions et leurs n premières dérivées en h, chacune à chacune. Or les dérivées successives en h de $f(x+h)$ sont évidemment $f'(x+h)$, $f''(x+h)$, ...; et celles de $\varphi(h)$ s'obtiennent par des différentiations immédiates. Pour $h=0$, la fonction proposée et ses n premières dérivées deviennent $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, tandis que les valeurs analogues de $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$, ..., $\varphi^{(n)}(h)$ se réduisent respectivement à A_0, A_1, A_2, ..., A_n. On prendra donc

$$(9)\quad A_0=f(x),\qquad A_1=f'(x),\qquad A_2=f''(x),\quad \ldots,\quad A_n=f^{(n)}(x).$$

D'ailleurs, la différence $\psi(h)=f(x+h)-\varphi(h)$ aura pour dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}(x+h)-A_n$, ou $f^{(n)}(x+h)-f^{(n)}(x)$, car la dérivée $n^{\text{ième}}$ du polynôme $\varphi(h)$ est constante; et la formule (8) donnera

$$\psi(h)\text{ ou }f(x+h)-\varphi(h)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)].$$

Désignons par R_n ce *reste*, ou *terme complémentaire*, qui doit être ajouté au *développement* obtenu $\varphi(h)$ du $n^{\text{ième}}$ degré pour recomposer la fonction $f(x+h)$, et il viendra les deux formules

$$(10)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x)+R_n,$$

$$(11)\qquad R_n=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)].$$

La première est appelée *formule de Taylor*; son second membre

devient la *série de Taylor* quand on y fait grandir n indéfiniment et que R_n tend vers zéro. La deuxième fournit une expression très simple de l'erreur R_n que l'on commet sur $f(x+h)$ en arrêtant à un certain terme le développement de la série. Dans le cas $n=1$, qui nous a servi de point de départ, cette expression se réduit bien à $h[f'(x+\theta h)-f'(x)]$, comme l'indiquait la relation fondamentale de la page 35.

Les seules conditions qu'il ait fallu admettre, relativement à la fonction $\psi(h)=f(x+h)-\varphi(h)$, pour établir la formule (11) de R_n, ont été la continuité de cette fonction et de ses n premières dérivées, dans tout l'intervalle compris entre la valeur zéro de h et sa valeur actuelle. Or ces conditions seront satisfaites si, d'une part, le polynôme $\varphi(h)$ est continu, ce qui exige que $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, ou $f(x)$, $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, n'aient pas leurs valeurs infinies, et, d'autre part, si les fonctions $f(x+h), f'(x+h), f''(x+h), \ldots, f^{(n)}(x+h)$ ne cessent pas elles-mêmes d'être continues entre les valeurs extrêmes x et $x+h$ de leur variable.

Alors, en considérant spécialement les très petites valeurs absolues de h, le développement obtenu exprimera la décomposition de $f(x+h)$ en éléments, $f(x)$, $\frac{f'(x)}{1}h$, $\frac{f''(x)}{1.2}h^2, \ldots,$ d'un ordre de petitesse de plus en plus élevé. Par conséquent, la série convergera très vite : le rapport d'un terme au précédent (abstraction faite de ceux qui seraient identiquement nuls) y contiendra le facteur h et sera comme infiniment petit. Mais, de plus, elle convergera bien vers $f(x+h)$; car on voit, par le second membre de (11), que le rapport du reste R_n au dernier terme employé $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x)$ égalera le quotient, évanouissant avec h, $\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)}$, dont le dividende est l'accroissement de la fonction continue $f^{(n)}(x)$ pour le très petit changement θh de la variable, et dont le diviseur $f^{(n)}(x)$, indépendant de h, diffère de zéro si l'on admet que le dernier terme en question auquel on s'est arrêté en diffère lui-même.

La continuité de la fonction f et de ses dérivées étant admise, il faudrait donc, pour que $f(x+h)$, lors d'accroissements h très faibles, échappât au développement par la série de Taylor, que les dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x), \ldots,$ jusqu'à l'infini, fussent nulles pour la valeur particulière x choisie. Alors la formule (10) ne trouverait, pour ainsi dire, rien à extraire de la quantité $f(x+h)$, ou, du moins, de sa partie variable $f(x+h)-f(x)$; car celle-ci, rédu-

tible à $R_n = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x+\theta h)$, où $f^{(n)}(x+\theta h)$ tendrait vers zéro avec h quelque grand qu'on prît n, serait d'un ordre infini de petitesse en h. En d'autres termes, la quantité $f(x+h)$ varierait plus lentement en fonction de h, dans le voisinage de $h=0$, que toute puissance de h, et, par suite, sa marche à ce moment ne comporterait pas d'expression algébrique approchée. Cauchy a donné comme exemple d'une telle fonction l'exponentielle $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$, dont il a été parlé tout à l'heure et qui, pour $x=0$, présente un contact d'ordre infini avec la fonction constamment nulle $y=0$. Cette exponentielle, si l'on y compte les accroissements h à partir de la valeur zéro de x, échappe donc, grâce à son extrême petitesse dans le voisinage, au développement par la formule de Taylor, et même à tout développement suivant des puissances quelconques de h, eussent-elles leurs exposants fractionnaires.

A part une aussi rare exception, les formules (10) et (11) rempliront ainsi parfaitement le but qu'on se proposait dans le cas de petits accroissements h. Mais, en outre, leur démonstration n'ayant exigé aucune hypothèse restrictive touchant la grandeur de h, on s'en servira pour développer $f(x+h)$ en série, toutes les fois qu'il sera possible de prouver l'évanouissement de R_n à la limite $n=\infty$.

C'est ce qui se fera notamment, par la formule (11), quand les dérivées, supposées d'ailleurs continues, de $f(x+h)$, ne grandiront pas indéfiniment à mesure que leur ordre s'élèvera; et alors, quelque grand que soit h, le développement en série sera légitime. En effet, le facteur $f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)$, dans (11), ne dépassant pas une certaine grandeur, il suffira, pour que R_n tende vers zéro, que le produit $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$ y tende lui-même. Or c'est bien ce qui a lieu; car, si p désigne un nombre entier supérieur à h, ce produit peut toujours, pour n assez grand, s'écrire $\left(\frac{h^p}{1.2.3\ldots p}\right)\left(\frac{h}{p+1}\frac{h}{p+2}\cdots\frac{h}{n}\right)$, et, d'une part, le facteur fini $\frac{h^p}{1.2.3\ldots p}$ n'y varie pas avec n, tandis que, d'autre part, le facteur $\frac{h}{p+1}\frac{h}{p+2}\cdots\frac{h}{n}$, évidemment inférieur à $\left(\frac{h}{p+1}\right)^{n-p}$, tend vers zéro comme les puissances successives de la fraction proprement dite $\frac{h}{p+1}$.

Parmi les fonctions comprises dans ce cas de convergence, ou dont les dérivées ne grandissent pas indéfiniment à mesure que leur ordre s'élève, il importe de remarquer les trois fonctions fondamentales e^x,

$\cos x$, $\sin x$, qui se reproduisent sans fin par une ou par plusieurs différentiations. Nous verrons bientôt (n° 95) quels développements elles donnent suivant les puissances, par exemple, de x; et nous trouverons ainsi, notamment, les expressions en série de $\cos x$ et de $\sin x$ annoncées à la page 61, après le titre du n° 21*.

94. — Formes du reste dues à Lagrange, à Cauchy et à M. Roche.

D'autres cas de convergence de la série de Taylor, plus particuliers et plus délicats à reconnaître, exigent parfois l'emploi d'une forme du reste R_n, due à Cauchy, un peu moins simple que (11), et, à ce propos, il y a lieu d'étudier un instant les expressions les moins complexes que peut recevoir R_n. Nous admettrons, dans ce but, la continuité non seulement des fonctions $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$, mais aussi de la dérivée suivante $f^{(n+1)}$, entre les deux valeurs x, $x+h$ de la variable.

Et, d'abord, cette hypothèse permettra de pousser le développement, dans (10), jusqu'au terme $\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x)$; ce qui introduira un nouveau reste R_{n+1} exprimé, d'après (11), par

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}[f^{(n+1)}(x+\theta h)-f^{(n+1)}(x)],$$

avec une valeur de θ différente, bien entendu, de celle que contient l'expression (11) de R_n.

Or le reste précédent R_n représente évidemment la somme du nouveau terme et de R_{n+1}; en sorte qu'on a

$$(12) \qquad R_n = \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Telle est la forme du reste, simple transformée ou application de (11), comme on voit, qui, trouvée par Lagrange, a été la première connue.

Lorsque h est fort petit, on peut généralement y remplacer, sans erreur appréciable, $f^{(n+1)}(x+\theta h)$ par $f^{(n+1)}(x)$, tandis que, dans (11), la petite différence, $f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)$, de $f^{(n)}(x)$, se trouve, en même temps, réductible au produit de la dérivée $f^{(n+1)}(x)$ par l'accroissement θh de la variable. Alors la comparaison des deux valeurs (11) et (12) montre que l'on a, dans (11), $\theta = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, la fraction de l'unité appelée θ dans (11) ne prend pas indifféremment, suivant la nature de la fonction, des valeurs quelconques entre zéro et 1, du moins

lorsque h est fort petit; car elle tend, en général, vers $\frac{1}{n+1}$ quand h s'approche de zéro. Dans le cas le plus simple, qui est celui de $n=1$, où l'ensemble des deux formules (10) et (11) équivaut à la relation fondamentale $f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$, il vient $\theta=\frac{1}{2}$ ou, en divisant par h,

$$(13)\qquad (\text{pour } h \text{ très petit})\quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Mais passons à la forme de R_n trouvée par Cauchy. Pour l'obtenir, observons que le second membre de (10), moins le dernier terme R_n, exprimerait $f(x+h)$ si la dérivée $f^{(n+1)}$ était identiquement nulle; ce qui réduirait à zéro le second membre de (11). Alors la somme

$$(14)\qquad f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x),$$

égalant $f(x+h)$, dépendrait uniquement de la valeur finale $x+h$, que je peux appeler X, de la variable, et non pas de sa valeur initiale x, au moyen de laquelle s'exprime d'ailleurs la différence $h=X-x$. Donc, en appelant $F(x)$ cette somme (14) où x sera considérée comme une variable, c'est-à-dire en posant

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} F(x)&=f(x)+\frac{X-x}{1}f'(x)\\ &\quad+\frac{(X-x)^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{(X-x)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x),\end{aligned}\right.$$

on peut être assuré que la dérivée $F'(x)$ s'annulera dès qu'on aura identiquement $f^{(n+1)}(x)=0$; et, comme la forme même (15) de $F(x)$ montre que la dérivée $F'(x)$ ne contient $f^{(n+1)}(x)$ que dans un dernier terme, il est inévitable, pour que l'annulation de ce dernier terme entraîne celle de $F'(x)$, que tous les termes précédents s'entre-détruisent, quelle que soit la fonction $f(x)$. Effectivement, si l'on différentie en x le second membre de (15), chaque terme de la forme $\frac{(X-x)^m}{1.2.3\ldots m}f^{(m)}(x)$ donne pour dérivée, en faisant varier d'abord le facteur $(X-x)^m$, puis le facteur $f^{(m)}(x)$,

$$-\frac{m(X-x)^{m-1}}{1.2.3\ldots m}f^{(m)}(x)+\frac{(X-x)^m}{1.2.3\ldots m}f^{(m+1)}(x),$$

expression dont la première partie détruit la deuxième provenant de la différentiation du terme précédent $\frac{m(X-x)^{m-1}}{1.2.3\ldots m}f^{(m-1)}(x)$. Comme,

d'ailleurs, pour le premier terme $f(x)$, ou $\frac{(X-x)^{1-1}}{1} f(x)$, la dérivée se réduit à la seconde partie, il ne reste que la deuxième de la dérivée du dernier terme, et l'on a bien en définitive, quelle que soit la fonction $f(x)$,

$$(16) \qquad F'(x) = \frac{(X-x)^n}{1.2.3\ldots n} f^{n+1}(x).$$

Or, à l'instant où $x = X$, $F(x)$ se réduit identiquement, d'après (15), à $f(X)$, c'est-à-dire à $f(x+h)$. Par conséquent, le reste R_n, différence entre $f(x+h)$ et l'expression (14), n'est pas autre chose que l'accroissement $F(X) - F(x)$ de la fonction $F(x)$, corrélatif à l'accroissement $X - x$ de sa variable, et il vaut, d'après la formule fondamentale du Calcul différentiel, le produit de ce dernier accroissement $X - x$ ou h par la dérivée F', prise pour une certaine valeur de la variable, intermédiaire entre x et $X = x + h$, qu'on peut appeler $x + \theta h$. Cela supposé, bien entendu, la continuité de $F(x)$ et de $F'(x)$, c'est-à-dire de la fonction f et de ses $n+1$ premières dérivées, entre les limites x et $x+h$. Il vient donc, dans ces conditions,

$$R_n = h F'(x + \theta h),$$

c'est-à-dire, vu la relation (16) où il faudra remplacer X par $x+h$ et x par $x+\theta h$,

$$(17) \qquad R_n = \frac{(h-\theta h)^n}{1.2.3\ldots n} h f^{n+1}(x+\theta h).$$

Telle est la forme du reste obtenue par Cauchy. Sa supériorité sur (11), ou sur la précédente (12), pour prouver, dans les cas où c'est difficile à reconnaître, que R_n tend vers zéro quand n grandit indéfiniment, tient à ce qu'il y paraît en numérateur, au lieu des n facteurs h de la formule (11), ce même nombre indéfiniment croissant de facteurs plus voisins de zéro $h - \theta h$.

Enfin M. Roche, ancien professeur de la Faculté des Sciences de Montpellier, a montré en 1858 que les deux formes du reste trouvées par Lagrange et Cauchy étaient comprises dans une autre, beaucoup plus générale et presque aussi simple. On y arrive de suite, en continuant à regarder la valeur finale X ou $x+h$ comme fixe, et en mettant R_n, pour la valeur considérée, également fixe, de x, sous la forme Mh^p, c'est-à-dire $M(X-x)^p$, p désignant un exposant constant supérieur à zéro, mais d'ailleurs quelconque. Par conséquent, l'expression (14) augmentée de Mh^p ou, ce qui revient au même d'après (15), la somme $F(x) + M(X-x)^p$, est une fonction de x qui, ré-

duite évidemment à $F(x) = f(X)$ pour $x = X$, redevient égale à $f(X)$ quand x, s'éloignant de X, atteint la seconde limite fixe que l'on considère : car M désigne justement la quantité qu'il faut pour que cela soit. Donc, d'après un théorème de la deuxième Leçon (p. 35), la dérivée, $F'(x) - Mp(X-x)^{p-1}$, s'annule dans l'intervalle, pourvu, du moins, qu'elle y soit continue comme la fonction; ce qui aura lieu si f et ses $n+1$ premières dérivées le sont. En appelant encore $x+\theta h$ la valeur intermédiaire dont il s'agit, on aura

$$F'(x+\theta h) - Mp(h-\theta h)^{p-1} = 0;$$

d'où

$$M = \frac{F'(x+\theta h)}{p(h-\theta h)^{p-1}}.$$

Substituons à $F'(x+\theta h)$ sa valeur, déduite comme précédemment de (16), puis multiplions par h^p pour obtenir Mh^p ou R_n, et nous aurons la formule de M. Roche:

$$(18) \qquad R_n = \frac{h^p(h-\theta h)^{n+1-p}}{(1.2.3\ldots n)p} f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Celle de Cauchy, (17), s'en déduit en donnant à p la plus petite valeur entière possible 1 et, celle de Lagrange, (12), en donnant à p la valeur, $n+1$, qui fait disparaître les facteurs $h-\theta h$.

95. — Formule et série de Mac Laurin : développements de e^x, $\cos x$ et $\sin x$.

La formule (10) de Taylor donne celle de Mac Laurin lorsqu'on y compte les accroissements h à partir d'une valeur nulle de la variable, en prenant ainsi $x = 0$. Si l'on remplace ensuite h par la lettre x devenue disponible, on trouve

$$(19) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0) + R_n.$$

Les expressions (11), (12), (17), (18) de R_n se transforment d'une manière analogue. Par exemple, la première, (11), et celle de Cauchy, (17), deviennent, l'une,

$$(20) \qquad R_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\left[f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)\right],$$

l'autre,

$$(21) \qquad R_n = \frac{(x-\theta x)^n}{1.2.3\ldots n} x f^{(n+1)}(\theta x).$$

Enfin, le second membre de la formule (19) prend le nom de *série*

de Mac Laurin lorsque, en y faisant grandir n sans limite, le reste R_n tend vers zéro ; ce qui arrive, naturellement, dans les mêmes cas généraux, examinés tout à l'heure (pp. 149 et 150), que pour le second membre de (10).

On pourra donc, en particulier, développer par la formule (19) les trois fonctions e^x, $\cos x$, $\sin x$, dont les dérivées successives, savoir e^x pour la première fonction, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, $\cos x$, ... pour la seconde et $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, ... pour la troisième, ne croissent pas à mesure que leur ordre s'élève. Ces dérivées se réduisant respectivement, pour $x = 0$, à 1, à 0, -1, 0, 1, ... et à 1, 0, -1, 0, ... il vient

$$(22)\quad \begin{cases} e^x = 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^3}{1.2.3} + \ldots, \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots, \\ \sin x = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots, \end{cases}$$

séries identiques à celles (13) et (26) [pp. 50 et 23*] qu'on avait obtenues pour ces fonctions, par des procédés spéciaux, dès le commencement du Cours.

Nous avons déduit la formule de Mac Laurin de celle de Taylor ; mais on pourrait, à l'inverse, déduire celle-ci de la formule de Mac Laurin. Développons, en effet, par cette dernière (19), suivant les puissances de x, une fonction de la forme $\varphi(a+x)$, qui, dépendant bien de x, peut être appelée $f(x)$. De $f(x) = \varphi(a+x)$ on tirera, par des différentiations successives, $f'(x) = \varphi'(a+x)$, $f''(x) = \varphi''(a+x)$, ...; d'où

$$f(0) = \varphi(a), \quad f'(0) = \varphi'(a), \quad f''(0) = \varphi''(a), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(\theta x) = \varphi^{(n)}(a+\theta x).$$

On aura donc, au lieu de (19) et (20),

$$\begin{cases} \varphi(a+x) = \varphi(a) + \dfrac{x}{1}\varphi'(a) + \dfrac{x^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots + \dfrac{x^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(a) + R_n, \\ R_n = \dfrac{x^n}{1.2.3\ldots n}\left[\varphi^{(n)}(a+\theta x) - \varphi^{(n)}(a)\right], \end{cases}$$

ce qui, sauf les changements de f en φ, de x en a et de h en x, revient bien à (10) et (11). Ainsi, les deux formules de Taylor et de Mac Laurin ont, au fond, la même étendue l'une que l'autre ; ce sont deux expressions différentes d'une seule et même relation.

96*. — Application de la série de Taylor au calcul le plus approché possible des dérivées d'une fonction par le moyen de deux ou de plusieurs valeurs voisines de la fonction.

(Compléments, p. 132*).

97. — Application de la série de Mac Laurin au développement de $(a+b)^m$, c'est-à-dire à la formule du binôme généralisée.

Un des exemples les plus importants qu'on puisse donner de l'emploi des séries de Taylor ou de Mac Laurin dans le cas d'accroissements h ou x de grandeur notable est le développement, par la formule du binôme, de $(a+b)^m$, quand l'exposant m cesse d'être entier et positif. En général, ce développement suivant les puissances ascendantes de b ne reste alors possible, c'est-à-dire convergent, que lorsqu'on a choisi pour b la plus petite (en valeur absolue) des deux parties de l'expression $a+b$; et il est d'ailleurs, conformément à ce qu'on a démontré en Algèbre pour le cas de m entier,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}(a+b)^m = a^m &+ \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,a^{m-2}b^2 + \dots\\ &+ \frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n+1}{n}\,a^{m-n}b^n + \dots\end{aligned}\right.$$

Seulement m se trouvant soit négatif, soit fractionnaire, aucun des facteurs m, $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... n'est nul et ne fait disparaître les termes où il figure, c'est-à-dire tous ceux qui viennent après un certain rang; d'où il suit que l'expression ne se termine plus et cesse d'être un simple polynôme pour devenir une série. C'est l'égalité de cette série à $(a+b)^m$ qu'il s'agit de démontrer.

Dans ce but, appelant x le rapport $\frac{b}{a}$, compris, par hypothèse, entre -1 et $+1$, mettons la formule (25), en divisant ses deux membres par a^m, sous la forme

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}(1+x)^m = 1 &+ \frac{m}{1}x + \frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,x^2 + \dots\\ &+ \frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n+1}{n}\,x^n + \dots;\end{aligned}\right.$$

et voyons si la série de Mac Laurin (19), dans laquelle on poserait $f(x) = (1+x)^m$, ne donnerait pas justement cette formule (26). De

$f(x) = (1+x)^m$, la différentiation déduit

$$\left\{\begin{aligned} f'(x) &= m(1+x)^{m-1},\\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f^{n}(x) &= m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},\\ f^{(n+1)}(x) &= m(m-1)\dots(m-n)(1+x)^{m-1-n}; \end{aligned}\right.$$

d'où il résulte, vu d'ailleurs que $f(0) = 1$,

$$\left\{\begin{aligned} &f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1), \quad \dots,\\ &\qquad f^{n}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1), \end{aligned}\right.$$

et aussi, pour l'appréciation du reste R_n par la formule (21) de Cauchy,

$$f^{(n+1)}(\theta x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n)\frac{(1+\theta x)^{m-1}}{(1+\theta x)^n}.$$

On voit, d'une part, que ces valeurs, portées dans le second membre de (19), donnent bien pour $(1+x)^m$ le développement voulu (26), et que, d'autre part, l'expression (21) du terme complémentaire R_n peut s'écrire, en y groupant convenablement les facteurs,

$$(27)\quad R_n = [mx(1+\theta x)^{m-1}]\left(\frac{m-1}{1}\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)\left(\frac{m-2}{2}\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)\dots\left(\frac{m-n}{n}\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right).$$

Il suffit donc de prouver que ce reste tend vers zéro quand n grandit indéfiniment.

Et d'abord, le facteur $mx(1+\theta x)^{m-1}$ y est compris entre les deux valeurs qu'il reçoit aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 1$, valeurs qui sont mx, $mx(1+x)^{m-1}$ et qui se trouvent toujours finies (même la seconde, où l'exposant $m-1$ peut bien être négatif, mais où $1+x$, par hypothèse, dépasse zéro). Ainsi, ce premier facteur n'empêchera pas R_n de tendre vers zéro, pour n croissant, si le produit des autres facteurs y tend. Or ces autres facteurs sont de la forme

$$\frac{m-i}{i}\frac{x-\theta x}{1+\theta x} \quad \text{ou} \quad -\left(1-\frac{m}{i}\right)\frac{x-\theta x}{1+\theta x},$$

avec i égal successivement à 1, 2, 3, ..., n. Dès que i devient assez grand par rapport à m, leur valeur absolue diffère donc aussi peu qu'on veut de celle de la fraction $\frac{x-\theta x}{1+\theta x}$; et il est aisé de reconnaître

d'ailleurs que cette fraction elle-même se trouve toujours comprise entre zéro et x. En effet, dans le cas de x positif, la différence, positive elle-même, $x - \theta x$, déjà plus petite que x, devient encore moindre quand on la divise par le nombre $1 + \theta x$ alors supérieur à l'unité. Et, dans le cas contraire de x négatif, si z désigne sa valeur absolue inférieure à 1, celle de $\frac{x - \theta x}{1 + \theta x}$, évidemment exprimée par $\frac{z - \theta z}{1 - \theta z}$, n'atteint pas z, qui la dépasse de

$$z - \frac{z - \theta z}{1 - \theta z} = \frac{(z - \theta z^2) - (z - \theta z)}{1 - \theta z} = \frac{\theta z(1 - z)}{1 - \theta z},$$

quantité essentiellement positive. Donc, lorsque i devient assez grand, le rapport du facteur $\frac{m - i}{i}\,\frac{x - \theta x}{1 + \theta x}$ à x ne peut pas, en valeur absolue, dépasser l'unité, si ce n'est tout au plus d'une quantité finissant par être inférieure à une limite ε aussi petite qu'on le voudra. Par suite, le produit d'un nombre indéfiniment croissant p de pareils facteurs est, en valeur absolue, inférieur à x^p ou, du moins, à la puissance $p^{\text{ième}}$ d'une quantité $x(1 - \varepsilon)$ également comprise entre -1 et $+1$, puissance qui tend vers zéro. Ainsi R_n, produit de pareils facteurs par un nombre restreint d'autres facteurs limités, comme $mx(1 + \theta x)^{m-1}$ et $\frac{m-1}{1}\,\frac{x - \theta x}{1 + \theta x}$, $\frac{m-2}{2}\,\frac{x - \theta x}{1 + \theta x}$, ... ne peut manquer d'approcher indéfiniment de zéro quand n devient très grand, et les formules (25) ou (26) sont bien démontrées.

Si on les applique, par exemple, à l'extraction en série des deux racines $\sqrt{\frac{1}{1 - u}}$ et $\sqrt{1 - u}$, qui peuvent s'écrire $(1 - u)^{\mp\frac{1}{2}}$, il y aura lieu de poser, dans (26), $m = \mp\frac{1}{2}$ et $x = -u$, supposé du moins que la valeur absolue de u n'atteigne pas l'unité. Les coefficients $\frac{m}{1}$, $\frac{m-1}{2}$, ..., $\frac{m-n+1}{n}$ seront, dans le premier cas,

$$-\frac{1}{2},\quad -\frac{3}{4},\quad \ldots,\quad -\frac{2n-1}{2n},$$

et, dans le second,

$$\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{4},\quad \ldots,\quad -\frac{2n-3}{2n}.$$

D'ailleurs, tous les termes des deux séries, à partir du deuxième, se trouveront affectés du même signe; car il s'introduira, de chacun d'eux au suivant, deux facteurs de plus précédés du signe $-$, savoir,

un nouveau coefficient et un nouveau facteur x ou $-u$. Il viendra aisément, en donnant aux résultats les formes les plus symétriques :

$$
(28)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\text{pour } u^2 < 1)\\
&\frac{1}{\sqrt{1-u}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\frac{3}{4}u^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}u^n + \ldots,\\
&\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2}\frac{u}{1} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{u^2}{3} - \ldots - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{u^n}{2n-1} - \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

98*. — Extension de la série de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.

(Compléments, p. 134*).

DIXIÈME LEÇON.

SUITE DES APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL : THÉORIE GÉNÉRALE DES VALEURS MAXIMA OU MINIMA DES FONCTIONS; PROBLÈME DE FERMAT, ETC.

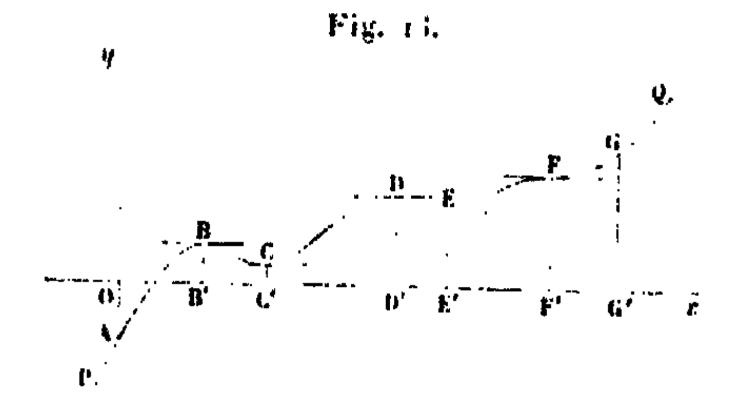
---

99. — Des maxima ou des minima des fonctions et de leurs plus grandes ou de leurs plus petites valeurs.

Étant donnée une fonction d'un nombre quelconque de variables x, y, z, ... on dit qu'une de ses valeurs, $f(x, y, z, \ldots)$, est *maxima*, quand elle dépasse toutes les valeurs voisines $f(x+h, y+k, z+l, \ldots)$, obtenues en donnant, aux variables respectives, des accroissements positifs ou négatifs $h, k, l, \ldots$ aussi faibles que l'on veut, mais dont les rapports mutuels soient arbitraires. Au contraire, la valeur considérée $f(x, y, z, \ldots)$ serait *minima*, si elle se trouvait plus petite que toute valeur très voisine $f(x+h, y+k, z+l, \ldots)$. Par exemple, une fonction $f(x)$ d'une seule variable devient maximum, quand elle est sur le point de décroître après avoir grandi, ou que sa valeur actuelle $f(x)$ dépasse tout à la fois une valeur précédente très voisine $f(x-\varepsilon)$ et une valeur suivante $f(x+\varepsilon_1)$; elle devient, de même, minimum, quand, au contraire, elle va croître après avoir diminué, ou que sa valeur actuelle est dépassée tant par une valeur précédente $f(x-\varepsilon)$ que par une valeur suivante $f(x+\varepsilon_1)$.

Supposons que PQ soit la courbe $y=f(x)$ représentative de la

Fig. 14.



fonction : ses maxima se produiront pour les valeurs $x=\mathrm{OB}'$, $x=\mathrm{OD}'$

de la variable et seront les ordonnées $y = B'B$, $y = D'D$; ses minima se produiront pour $x = OC'$, $x = OE'$ et seront $y = C'C$, $y = E'E$.

Un minimum peut, d'après cela, se trouver plus grand qu'un maximum, comme est, par exemple, le minimum E'E, supérieur au maximum B'B; et, de plus, des valeurs qui ne sont ni maximum ni minimum peuvent être, soit supérieures au plus fort maximum, comme $y = G'G$ par exemple, soit inférieures au plus faible des minima, comme est, sur la figure, l'ordonnée négative $y = -OA$.

Il arrive assez fréquemment que les variables indépendantes, dans la question proposée, n'ont pas à sortir de certaines limites, quoique la fonction puisse continuer à exister au delà. Si l'on considère, par exemple, la distance d'une origine de coordonnées rectangulaires x et y aux divers points (x, y) d'une circonférence de rayon r ayant son centre sur l'axe des x, son carré $x^2 + y^2$ est une certaine fonction de x dont les valeurs utiles tombent toutes entre les deux limites $x = a \mp r$, où a désigne l'abscisse du centre, puisque le cercle n'a aucun point hors de ces limites; et, cependant, d'après l'équation $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ du cercle, l'expression de ce carré $x^2 + y^2$ est la fonction linéaire $r^2 - a^2 + 2ax$, que rien n'empêche de prolonger fictivement en deçà de la valeur $x = a - r$, jusqu'à $x = -\infty$, et au delà de la valeur $x = a + r$, jusqu'à $x = \infty$.

Il importe d'observer que, dans de pareils cas, la plus grande et la plus petite des valeurs à considérer de la fonction ne sont nécessairement un maximum ou un minimum que lorsqu'elles se produisent à l'intérieur des limites; de sorte qu'on puisse, sans sortir de ces dernières, faire varier très peu, dans tous les sens, les variables indépendantes, de part et d'autre de leurs valeurs donnant la plus forte ou la plus faible valeur cherchée de la fonction. Mais quand, au contraire, celle-ci se produit aux limites mêmes, rien ne dit que la fonction ne pût pas ou croître ou décroître encore, si l'on venait à en sortir, et la valeur cherchée n'est généralement ni un maximum, ni un minimum. C'est ainsi que, dans la courbe PQ ci-dessus, les ordonnées $-OA$ et G'G, sans être ni des minima, ni des maxima, sont respectivement la plus petite et la plus grande des ordonnées comprises entre les limites $x = 0$ et $x = OG'$.

On peut donc énoncer le principe suivant, qu'il y a lieu quelquefois d'appliquer : ***La valeur la plus petite et la valeur la plus grande d'une fonction continue doivent être cherchées, soit parmi ses minima et ses maxima, soit parmi les valeurs qu'elle prend aux limites de l'espace dans lequel se meuvent ses variables.*** Si l'on demande, par exemple, la plus courte et la plus longue des droites qu'on peut mener de

l'origine à la circonférence ayant pour équation $(x-a)^2+y^2=r^2$, on observera que le carré x^2+y^2 de ces droites, exprimé par la fonction linéaire, sans cesse variable dans le même sens, r^2-a^2+2ax, n'a ni minimum ni maximum, et que, par conséquent, les valeurs demandées sont précisément celles que reçoit la fonction aux deux limites $x=a\mp r$ entre lesquelles varie x.

100. — Théorie générale des maxima et des minima des fonctions d'une seule variable : principes de Fermat et de Képler.

De part et d'autre de la valeur x qui rend maximum ou minimum une fonction $y=f(x)$, cette fonction décroît dans le cas du maximum et croît dans le cas du minimum, de manière à passer deux fois, dans le voisinage, par un même état de grandeur, savoir, pour deux valeurs $x-\varepsilon$ et $x+\varepsilon_1$ de la variable, infiniment voisines, et qui sont, l'une, $x-\varepsilon$, inférieure, l'autre, $x+\varepsilon_1$, supérieure à la valeur cherchée x. Réciproquement, une fonction donnée $f(x)$ ne se maintenant pour ainsi dire jamais constante d'une manière continue entre deux valeurs distinctes (fussent-elles infiniment voisines) de la variable, l'égalité de deux valeurs successives $f(x-\varepsilon)$ et $f(x+\varepsilon_1)$ de la fonction est un indice suffisant que cette fonction éprouve, dans l'intervalle, un accroissement suivi de décroissement ou un décroissement suivi d'accroissement, c'est-à-dire un maximum ou un minimum. On admet, bien entendu, dans le très petit intervalle considéré, la continuité de la fonction, et sa détermination parfaite, c'est-à-dire l'unité de la série de ses valeurs entre $f(x-\varepsilon)$ et $f(x+\varepsilon_1)$. Sous ces réserves, on peut donc énoncer le principe suivant, mis en vue vers le milieu du XVIIe siècle par le profond géomètre français Fermat et, peu après, par Huygens : *La valeur de la variable qui rend maximum ou minimum une fonction $y=f(x)$ est celle que comprennent entre elles deux valeurs infiniment voisines donnant à la fonction une même grandeur*. Autrement dit, si, en attribuant à la fonction y une suite croissante ou décroissante de valeurs, il arrive que l'équation $y=f(x)$, résolue par rapport à x, ait deux racines de moins en moins inégales, dont la différence tende vers zéro, la limite commune intermédiaire x où elles viennent se joindre est la valeur de la variable pour laquelle se produit un maximum ou un minimum, dernier terme de la suite croissante ou décroissante considérée des valeurs de y.

Admettons, par exemple, que l'équation $y=f(x)$ soit du second degré en x. Alors l'égalité cherchée des deux racines s'obtiendra évidemment en annulant le radical à double signe, de la forme $\pm\sqrt{\varphi(y)}$.

auquel conduit la résolution de cette équation; et les maxima ou minima de y seront ainsi donnés par la relation $\varphi(y) = 0$. Or x et, par suite, $\varphi(y)$ étant supposés continus, ces valeurs de y, qui annulent $\varphi(y)$, séparent, sur l'axe des y où l'on projetterait les divers points de la courbe $y = f(x)$, les régions dans lesquelles la fonction $\varphi(y)$ est positive, et le radical $\sqrt{\varphi(y)}$ réel, de celles où elle est négative et où, le radical $\sqrt{\varphi(y)}$ s'y trouvant imaginaire, l'ordonnée y ne peut se terminer pour aucune valeur *réelle* de x. Il y a donc, dans le cas simple d'une équation en x du second degré, parfaite concordance entre le principe général de Fermat et la méthode donnée spécialement pour ce cas en Algèbre élémentaire, méthode qui consiste à chercher entre quelles limites la quantité sous le radical ne devient pas négative.

Mais introduisons la notion de dérivée dans le principe de Fermat ou de Huygens, exprimé par la formule $f(x+\varepsilon_1) - f(x-\varepsilon) = 0$; et admettons d'abord que la fonction $y = f(x)$ ait ses dérivées successives continues jusqu'à la plus élevée de celles que l'on pourra être appelé à considérer. Alors, si l'on fait tendre ε et, par suite, ε_1 vers zéro, le rapport nul $\frac{f(x+\varepsilon_1) - f(x-\varepsilon)}{(x+\varepsilon_1) - (x-\varepsilon)}$, qui est celui de deux accroissements simultanés de la fonction et de sa variable, ne peut évidemment présenter avec la dérivée correspondante $f'(x-\varepsilon)$ qu'une différence évanouissante, en sorte qu'il vient à la limite $f'(x) = 0$. Ainsi, *la pente $f'(x)$ de la fonction s'annule aux instants de maximum ou de minimum;* ce que montrent bien, sur la courbe précédente PQ, les tangentes menées aux points B, C, D, E. Et, si l'on se souvient d'ailleurs que la dérivée $f'(x)$ est la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $\lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, son annulation revient à écrire $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ une quantité extrêmement petite ε; ce qui signifie qu'*au moment où une fonction devient maximum ou minimum, tout accroissement très petit, positif ou négatif, donné à la variable, ne fait éprouver à cette fonction qu'un accroissement incomparablement moindre encore;* ou, plus brièvement, qu'*une fonction n'a pas de variations sensibles aux environs de ses maxima et de ses minima.*

Sous cette forme un peu généralisée, consistant à écrire $f'(x) = 0$ ou $\Delta f(x) = \varepsilon \Delta x$ au lieu de $\Delta f(x-\varepsilon) = 0$, le principe de Fermat est un des plus importants de la Philosophie naturelle, et son extrême simplicité a dû le faire connaître ou, du moins, pressentir de tout temps; mais Képler paraît, le premier, l'avoir formulé assez explicite-

ment, vers le commencement du XVIIe siècle, pour mériter de lui donner son nom. Ce principe n'énonce pas d'ailleurs, aussi bien que sous sa première forme $\Delta f(x-\varepsilon)=0$ ou $f(x+\varepsilon_1)=f(x-\varepsilon)$, une condition suffisante de maximum ou de minimum, mais seulement une condition nécessaire; car il peut arriver exceptionnellement, comme au point F de la figure ci-dessus, que la pente y' de la fonction s'annule sans changer de signe, ou que la fonction ne cesse pas soit de croître, soit de décroître, à l'instant où ses variations deviennent incomparablement plus faibles qu'ailleurs; et alors cette fonction, ne passant pas deux fois par la même valeur, n'est ni maximum, ni minimum.

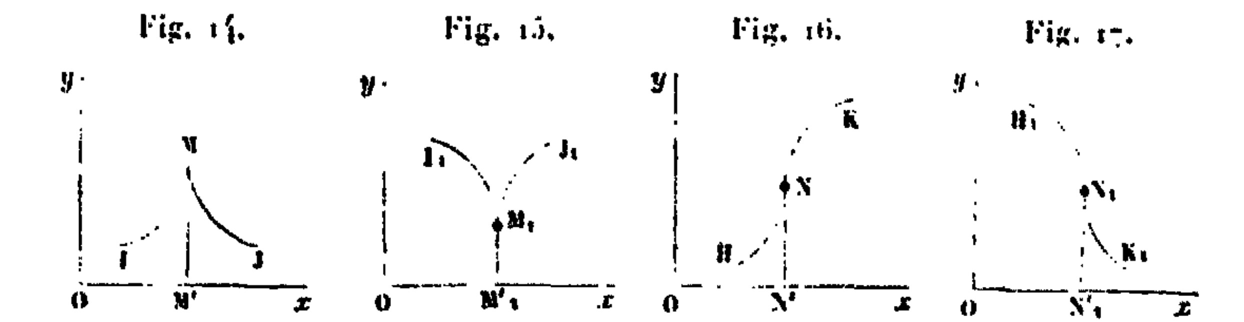
Il faut donc, à la condition $f'(x)=0$, en joindre d'autres pour exprimer complètement un maximum ou un minimum. A cet effet, considérons la dérivée seconde $f''(x)$. Elle est, en général, différente de zéro au moment où la dérivée première $f'(x)$ s'annule; et celle-ci, en train de décroître quand $f''(x)$ se trouve négative, en train de croître quand $f''(x)$ se trouve positive, passe, dans le premier cas, du positif au négatif et, dans le second, du négatif au positif, à l'instant où elle est nulle. Donc la fonction proposée $f(x)$ cesse alors ou de croître ou de décroître, et l'on a $f(x-\varepsilon)<f(x)>f(x+\varepsilon_1)$ dans le premier cas, $f(x-\varepsilon)>f(x)<f(x+\varepsilon_1)$ dans le second. Ainsi, ***la fonction proposée $f(x)$, au moment où sa dérivée première s'annule, est maximum ou minimum suivant qu'elle a sa dérivée seconde $f''(x)$ négative ou positive.***

Mais qu'arrive-t-il quand cette dérivée seconde $f''(x)$ est actuellement nulle, comme la première $f'(x)$? Le maximum ou le minimum existant à la condition nécessaire et suffisante que la dérivée première $f'(x)$ passe du positif au négatif ou du négatif au positif et, par conséquent, soit dans une période ou de décroissance, ou de croissance, cela revient évidemment à dire que la dérivée seconde $f''(x)$, actuellement nulle par hypothèse, doit, pour cela, rester ou négative, ou positive, dans tout le voisinage, c'est-à-dire être elle-même actuellement maxima ou minima comme $f(x)$. Donc sa propre dérivée première, $f'''(x)$, doit s'annuler, et sa dérivée seconde, $f^{\text{iv}}(x)$, être soit négative dans le cas du maximum ou positive dans le cas du minimum, soit maxima ou minima elle-même si elle est actuellement nulle. En passant, dans ce dernier cas, aux dérivées suivantes $f^{\text{v}}(x)$, $f^{\text{vi}}(x)$ et continuant de même, on voit que la question de savoir si la valeur considérée de x, racine de l'équation $f'(x)=0$, donne un maximum ou un minimum de $f(x)$, sera tranchée pourvu que cette valeur, portée dans les dérivées successives $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., ne les annule pas toutes. Alors, en effet, si la première de ces dérivées qui différera de

zéro est d'ordre pair, toutes les dérivées précédentes, d'ordre également pair, jusqu'à la fonction proposée (qu'on peut regarder comme étant sa propre dérivée d'ordre zéro), seront maxima ou minima, savoir maxima quand cette première dérivée différente de zéro se trouvera négative, minima quand elle se trouvera positive. Et si, au contraire, la première des dérivées qui différera de zéro est d'ordre impair, la dérivée précédente, d'ordre pair, ne sera ni maximum ni minimum; ce qui empêchera toutes les dérivées de même parité moins élevées, jusqu'à la fonction $f(x)$ elle-même, d'être maximum ou minimum.

Comme il a été dit, on n'a pas, d'ordinaire, à consulter d'autre dérivée d'ordre supérieur que la dérivée seconde $f''(x)$, et il y a maximum ou minimum suivant que sa valeur actuelle est négative ou positive. Le plus souvent même, un simple coup d'œil jeté sur la question indique assez l'existence d'un maximum ou d'un minimum, et auquel des deux l'on doit s'attendre. Il n'y a donc alors qu'à calculer, par l'équation $f'(x)=0$, la valeur précise de x pour laquelle il se produit, et ensuite sa propre valeur $f(x)$.

Mais cela suppose la continuité de la dérivée $f'(x)$. Quand il arrive à celle-ci de varier brusquement, il y a lieu de voir si elle ne change pas à ces moments de signe; car il est clair qu'alors, suivant qu'elle passerait, pour des valeurs croissantes de x, du positif au négatif ou du négatif au positif, la fonction $f(x)$ cesserait ou de croître, ou de décroître, et présenterait un maximum ou un minimum. Le plus souvent, les discontinuités d'une fonction comme $f'(x)$ tiennent à l'existence, dans son expression, d'un dénominateur qui, s'annulant, la rend infinie, et toutes les valeurs de x correspondantes sont données par l'équation $f'(x)=\pm\infty$, c'est-à-dire $\frac{1}{f'(x)}=0$. On pourra donc résoudre celle-ci: après quoi l'on examinera si, pour la racine x trouvée, la pente $f'(x)$ change ou non de signe : dans le premier cas, la courbe représentative de la fonction (supposée toujours bien déterminée) $y=f(x)$ aura



l'une des formes IMJ, $I_1M_1J_1$, donnant lieu à l'ordonnée maximum

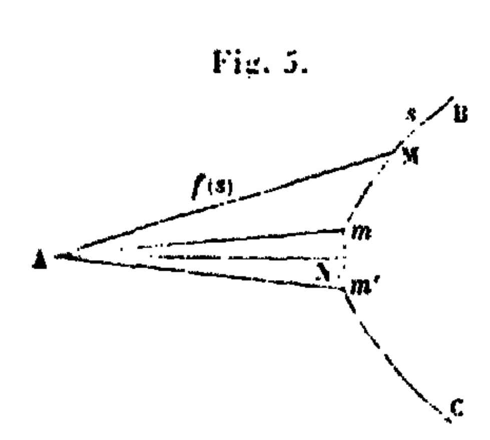
$y = M'M$ ou à l'ordonnée minimum $y = M'_1 M_1$; au contraire, dans le second cas, sa forme sera comme HNK ou $H_1 N_1 K_1$, et la pente, tout en devenant infinie en N ou en N_1, conservera son signe, de sorte que l'ordonnée correspondante $N'N$, $N'_1 N_1$ ne sera ni maxima ni minima.

On peut souvent, sans s'inquiéter de savoir si la dérivée $f'(x)$ est continue ou discontinue, et sans même former l'expression de $f(x)$, se contenter d'appliquer d'une manière purement géométrique la règle générale de Fermat, en exprimant sur la figure du problème à résoudre l'égalité de deux valeurs infiniment voisines de la fonction, et en tirant de cette égalité quelque conséquence simple qui permette de *construire* le maximum ou minimum cherché. Les deux exemples suivants, auxquels je me bornerai, montreront comment on procède.

101. — Premier exemple : distance minimum d'un point à une courbe.

Étant donnés une ligne quelconque BC, un point A situé ailleurs que sur elle et une droite mobile AM, menée de ce point à la ligne BC et définie par l'arc $BM = s$ qui mesure sur la courbe la distance de son extrémité variable M à une origine fixe B, on demande de construire cette droite dans la situation AN où elle est la plus courte. Il s'agit donc de rendre minimum la longueur AM, qui est évidemment une certaine fonction géométrique $f(s)$, bien continue, de l'*abscisse curviligne* s : si, par exemple, la courbe BC s'étend à l'infini des deux côtés de B et de C, $f(s)$ décroît d'abord, à partir de l'infini, pour croître ensuite indéfiniment, quand s grandit de $-\infty$ à $+\infty$; et le minimum existe bien.

Fig. 5.



Pour le déterminer, prenons sur la courbe, de part et d'autre du point N qui le définit, deux points infiniment voisins, m et m', tels que, en vertu du principe de Fermat, les deux valeurs correspondantes Am et Am' de la fonction soient égales. La corde infiniment petite mm' pourra être confondue, quant à la direction, avec la tangente menée soit en m, soit en N. Or, dans le triangle isoscèle mAm', les angles à la base m ou m', compléments de la moitié de l'angle infiniment petit au sommet A, ne diffèrent pas, à la limite, d'un droit et, par conséquent, les côtés Am, Am', quand ils viennent se confondre avec AN, sont perpendiculaires à la tangente en N. Ainsi,

la plus courte distance demandée est une normale menée de A à la courbe.

On démontrerait de même que, *lorsqu'il existe une droite de longueur maximum entre un point et une courbe, cette droite est normale à la courbe.*

102. — Deuxième exemple : problème de Fermat sur la réfraction de la lumière; loi de l'épargne ou de la moindre résistance.

Fermat, pour se rendre compte des phénomènes de la réflexion et de la réfraction, admit que *la lumière, en allant d'un point à un autre, choisit le trajet susceptible d'être parcouru dans le moins de temps possible;* et ce principe a été confirmé depuis par la théorie des ondes lumineuses. On conçoit, en effet, que, parmi tous les mouvements vibratoires envoyés d'un point à un autre à travers divers milieux ou par diverses voies, mouvements dont le plus ou moins de désaccord au point d'arrivée dépend de l'intervalle de leurs départs que mesure la différence des temps passés en route, les plus vite venus soient les seuls qui subsistent à ce point d'arrivée, ou qui s'y trouvent en assez grand nombre concordants pour n'être pas neutralisés en entier par d'autres de sens inverse; car, vu justement la quasi-invariabilité, près du minimum, de la fonction exprimant la durée des trajets, les mouvements arrivés par des chemins voisins du plus tôt parcouru ont tous exigé très sensiblement le même temps et sont, par suite, beaucoup moins discordants que les autres, ou constituent, dans l'ensemble, un groupe dont il subsiste quelque chose après la neutralisation mutuelle de tout le reste de l'ensemble. Aussi sont-ils les seuls qu'on observe, conformément au principe énoncé de l'économie du temps.

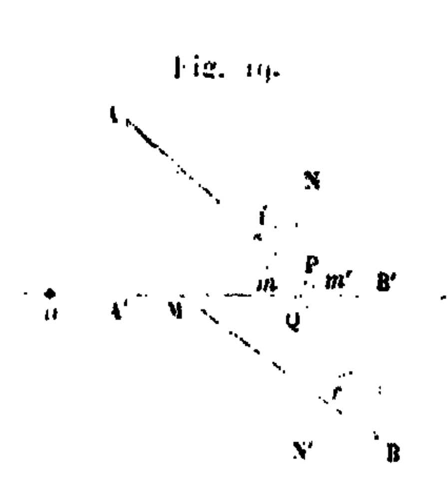
Fermat fut conduit à ce principe simple en remarquant d'abord qu'il était vérifié dans la transmission de la lumière à travers un milieu homogène et dans sa réflexion sur la surface limite d'un tel milieu, cas où, la vitesse de propagation (fonction de la nature du milieu) étant constante, la durée minimum du trajet correspond au chemin le plus court en longueur. Or on savait depuis l'antiquité que la lumière, quand elle se transmet à travers un même milieu ou qu'elle se réfléchit sur une surface, choisit bien, entre deux points donnés, l'un de départ, l'autre d'arrivée, la trajectoire minima, constituée dans un cas par la ligne droite et, dans l'autre, par une ligne brisée dont l'angle a sa bissectrice normale à la surface ([1]). Fermat

([1]) On démontre facilement par la Géométrie élémentaire, du moins quand la surface réfléchissante est plane, que cette ligne brisée a bien la longueur mini-

étendit ensuite, par induction, son *postulatum* de l'économie du temps au phénomène de la réfraction, dans lequel la lumière passe d'un premier milieu, où sa vitesse par seconde a une certaine valeur V, à un second milieu où sa vitesse prend une valeur différente V', et il put alors expliquer comme il suit les lois de ce phénomène.

Soient A le point de départ de la lumière, B le point d'arrivée, A' et B' les projections de ces points sur la surface de séparation des deux milieux, supposée plane, et, par suite, A'B' l'intersection de cette surface par le plan normal mené suivant A et B, plan de symétrie de la figure que forment A, B et les deux milieux. Tout trajet allant de A à B et qui sortirait du plan AA'BB' aurait évidemment, dans chaque milieu, plus de longueur que sa projection sur ce plan de symétrie. Donc le trajet de durée minimum y est compris, et se trouve constitué par une des lignes brisées, comme AMB, dont le sommet M est sur A'B', lignes que définit complètement l'abscisse OM $= x$ de ce point M, comptée le long de la droite A'B' à partir d'une origine arbitraire O. Comme le chemin correspondant AM dans le premier milieu serait parcouru avec la vitesse V et le chemin MB dans le second milieu avec la vitesse V', les durées de ces trajets partiels vaudraient $\frac{AM}{V}$, $\frac{MB}{V'}$: la fonction continue qu'il s'agit de rendre minimum est donc leur somme $y = \frac{AM}{V} + \frac{MB}{V'}$. On voit de suite que ce minimum existe; car, si le point M parcourt la droite indéfinie OB, ou que x varie de $-\infty$ à ∞, la durée du trajet, infinie aux deux limites et finie dans l'intervalle, ne pourra manquer, à un certain moment, de se mettre à grandir après avoir décrû.

Fig. 19.



Pour construire la trajectoire AMB telle qu'elle est à ce moment,

---

mum parmi toutes celles qui vont toucher la surface. Il suffit, pour le voir, d'observer qu'elle devient une droite quand on substitue à son premier côté la droite symétrique par rapport au plan réfléchissant, tandis que toute autre ligne brisée aboutissant aux mêmes extrémités se change, par une substitution analogue, en une autre ligne brisée menée entre les deux extrémités de la droite précédente et, par conséquent, plus longue qu'elle. Du reste, la démonstration par la méthode infinitésimale, donnée ci-après pour la réfraction, s'applique sans changement au cas de la réflexion.

imaginons que l'on prenne de part et d'autre, d'après le principe de Fermat, deux trajets infiniment voisins AmB, $Am'B$, d'égale durée. Abstraction faite de leurs parties pareilles que l'on obtient, par la construction des deux triangles isoscèles AmP, $Bm'Q$, en portant Am sur Am', en AP, et Bm' sur Bm, en BQ, il reste à comparer la partie Pm' du second trajet à la partie mQ du premier, pour exprimer que la différence des temps, $\frac{Pm'}{V}$ et $\frac{mQ}{V'}$, employés à les parcourir, est nulle. L'équation du minimum est donc

$$\frac{Pm'}{V} = \frac{mQ}{V'}.$$

Exprimons-y, en fonction de la variation infiniment petite mm' de la variable indépendante, les variations absolues simultanées Pm', mQ des deux parties du trajet ; et observons, pour cela, que, dans les deux triangles mPm', $m'Qm$, la proportion des sinus donne

$$Pm' = mm' \frac{\sin Pmm'}{\sin P}, \qquad mQ = mm' \frac{\sin Qm'm}{\sin Q}.$$

Il viendra, par la suppression du facteur commun mm',

$$\frac{\sin Pmm'}{V \sin P} = \frac{\sin Qm'm}{V' \sin Q}.$$

Or, dans cette relation, les angles P et Q ne dépassent évidemment un droit que de la moitié des angles infiniment petits au sommet A, B des triangles isoscèles AmP, $Bm'Q$; de sorte que, à la limite, $\sin P$ et $\sin Q$ se réduisent chacun à l'unité. D'ailleurs, si l'on mène dans les deux milieux respectifs les normales mN, $m'N'$ à leur surface de séparation, et qu'on appelle i et r ce que deviennent les angles AmN, $Bm'N'$ à la même limite, où m, m' se confondent et où Am est le *rayon incident*, $m'B$ le *rayon réfracté*, on aura, toujours à la limite, $Pmm' = i$, $Qm'm = r$; car les compléments, PmN, $Qm'N'$, de Pmm' et de $Qm'm$, seront aussi les compléments de i et r lorsque les bases mP et Qm' des triangles isoscèles AmP, BQm' prendront leurs directions finales, perpendiculaires aux côtés, alors confondus, émanés respectivement de A et B. Ainsi l'équation définitive du minimum est

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin r}{V'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V}{V'},$$

i et r étant les deux *angles* dits *d'incidence* et *de réfraction*.

Or on sait que cette formule exprime justement la loi expérimen-

tale de la réfraction et permet de construire le chemin que suit le mouvement ondulatoire.

Le principe de l'économie du temps revient sans doute, comme l'a remarqué Leibnitz, à dire que la lumière se propage toujours suivant la voie où elle éprouve le moins de résistance; car il est naturel de supposer la durée du trajet d'autant plus courte que la résistance totale opposée à la transmission est moindre. Il doit donc rentrer dans un principe plus général, *de moindre résistance* ou, encore, *de moindre action*, en vertu duquel les phénomènes se produisent par les moyens les plus faciles et s'enchaînent de manière à amener à chaque instant ceux qui nécessitent les moindres efforts ou qui, pour un effort donné, correspondent aux plus grands effets : principe malheureusement aussi vague, dans la plupart des cas, que celui non moins indispensable de la simplicité des lois générales, vu que nous savons rarement sur quoi la nature fait porter l'économie et la simplicité, ou quelles quantités précises elle rend minimum; mais principe néanmoins fondamental, utile tant à l'ingénieur qu'au physicien et au naturaliste, comme on le verrait par d'autres exemples encore que celui de la lumière, et précieux surtout en ce qu'il nous révèle dans les faits, plus vivement sinon mieux que les autres lois de l'univers accessibles à nos esprits et que l'idée simple de loi physique, une Intelligence ordonnatrice, ayant avec la nôtre assez d'analogie pour qu'il nous soit possible de saisir quelque chose de sa Pensée.

103. — Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables : théorie générale.

Toute fonction $f(x, y, z)$ de plusieurs variables devient dépendante d'une seule, quand on se borne à une certaine manière, d'ailleurs quelconque, d'y faire varier simultanément x, y, z. Si donc une valeur particulière $f(x, y, z)$ de cette fonction est ou moindre, ou plus grande, que toute valeur voisine $f(x+h, y+k, z+l)$, elle sera ou un minimum, ou un maximum, de la fonction d'une seule variable obtenue en prenant, par exemple, les accroissements simultanés de x, y, z, de part et d'autre de zéro, constamment proportionnels à trois de leurs valeurs, choisies à volonté, h, k, l. Pour fixer les idées, appelons t une variable indépendante auxiliaire, H, K, L trois coefficients finis, tels, que l'on ait, pour une certaine valeur très petite de t, $\mathrm{H}t=h$, $\mathrm{K}t=k$, $\mathrm{L}t=l$; et la fonction de t exprimée par $f(x+\mathrm{H}t, y+\mathrm{K}t, z+\mathrm{L}t)$ sera minimum ou maximum pour $t=0$ si $f(x, y, z)$ est un minimum ou un maximum de la fonction proposée. Il n'est pas moins évident

que, si, à l'inverse, $f(x + \mathrm{H}t, y + \mathrm{K}t, z + \mathrm{L}t)$, est, pour $t = 0$, minimum ou maximum quels que soient les rapports mutuels de H, K, L, la valeur $f(x, y, z)$ sera ou inférieure ou supérieure à toutes les valeurs voisines, $f(x + h, y + k, z + l)$, obtenues en prenant pour H, K, L les quotients de h, k, l par une quantité t du même ordre de petitesse, et que, par conséquent, $f(x, y, z)$ sera minimum ou maximum. Ainsi, chercher les minima ou les maxima d'une fonction $f(x, y, z)$ de plusieurs variables indépendantes, c'est chercher à quelles conditions se produit, pour $t = 0$, un minimum ou un maximum des fonctions $f(x + \mathrm{H}t, y + \mathrm{K}t, z + \mathrm{L}t)$ d'une seule variable t.

Bornons-nous à l'hypothèse de la continuité des dérivées partielles des deux premiers ordres de la fonction $f(x, y, z)$, et au cas ordinaire où l'existence des maxima et des minima à considérer de $f(x + \mathrm{H}t, y + \mathrm{K}t, z + \mathrm{L}t)$ dépend des deux seules dérivées première et seconde de f par rapport à t.

Vu la forme linéaire, en t, des fonctions simples $x + \mathrm{H}t$, $y + \mathrm{K}t$, $z + \mathrm{L}t$ entrant dans l'expression de f, ces deux dérivées se formeront suivant la règle du n° 58 (p. 112).

Et d'abord, d'après le principe de Fermat ou de Képler, la dérivée première devra s'annuler pour $t = 0$; *ce qui*, n'oublions pas de le remarquer, *étend évidemment aux fonctions de plusieurs variables la grande loi de leur quasi-invariabilité dans le voisinage d'un minimum ou d'un maximum.* Or cette dérivée première de f en t est évidemment, pour $t = 0$, $\frac{df}{dx}\mathrm{H} + \frac{df}{dy}\mathrm{K} + \frac{df}{dz}\mathrm{L}$. L'égaler à zéro, c'est donc écrire, en multipliant par t et rétablissant ainsi h, k, l au lieu de $\mathrm{H}t$, $\mathrm{K}t$, $\mathrm{L}t$,

$$\frac{df}{dx}h + \frac{df}{dy}k + \frac{df}{dz}l = 0. \tag{1}$$

D'ailleurs les petits accroissements arbitraires, positifs ou négatifs, h, k, l, peuvent être aussi bien regardés comme les différentielles de variables indépendantes x, y, z; et la relation (1) revient à poser

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0 \quad \text{ou} \quad df = 0. \tag{2}$$

Ainsi, *quand la fonction $f(x, y, z)$ est maximum ou minimum, sa différentielle totale s'annule identiquement pour les valeurs actuelles des variables.*

Les rapports mutuels de dx, dy, dz, dans (2), ou de h, k, l, dans (1), étant arbitraires, ces relations supposent nul, séparément, chacun

de leurs termes, auquel leur premier membre se réduirait si l'on choisissait l'accroissement correspondant h, k ou l différent de zéro et les autres accroissements nuls. L'équation unique $df = 0$ équivaut donc à annuler toutes les dérivées partielles premières de f, ou à poser, entre les inconnues x, y, z, le nombre égal de relations

$$(3) \qquad \frac{df}{dx} = 0, \qquad \frac{df}{dy} = 0, \qquad \frac{df}{dz} = 0.$$

C'est, *par conséquent*, ce système (3) d'équations, admettant généralement pour x, y, z un nombre fini de valeurs, qu'il faut d'abord résoudre quand on traite analytiquement le problème. Après quoi, il ne reste plus qu'à chercher si chacun des systèmes ainsi obtenus de valeurs rend la fonction $f(x, y, z)$ minimum ou maximum, ou ne la rend ni maximum ni minimum.

D'après la règle simple donnée ci-dessus (p. 164), on le reconnaît à l'examen du signe que prend, pour $t = 0$, la dérivée seconde $\frac{d^2f}{dt^2}$. Or celle-ci est alors $\left(H\frac{d}{dx} + K\frac{d}{dy} + L\frac{d}{dz}\right)^2 f(x, y, z)$, ou bien, en développant et multipliant par t^2 pour pouvoir substituer à Ht, Kt, Lt les petits accroissements effectifs h, k, l,

$$(4) \quad \frac{d^2f}{dx^2}h^2 + \frac{d^2f}{dy^2}k^2 + \frac{d^2f}{dz^2}l^2 + 2\frac{d^2f}{dy\,dz}kl + 2\frac{d^2f}{dz\,dx}lh + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}hk.$$

Appelons A, B, C, D, E, F les valeurs actuelles des dérivées secondes respectives, tant directes (en x, y, z) qu'obliques (en y et z, z et x, x et y), de la fonction proposée $f(x, y, z)$; et le polynôme (4), dont le signe décide de l'existence du minimum ou du maximum, s'écrira plus brièvement

$$(5) \qquad Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dkl + 2Elh + 2Fhk.$$

Abstraction faite du cas où l'expression (5) s'annulerait sans changer de signe et où il y aurait lieu de recourir aux dérivées d'un ordre supérieur au second, il faudra et il suffira que, les rapports mutuels de h, k, l recevant toutes les valeurs possibles, ce polynôme homogène du second degré en h, k, l soit positif, pour qu'il y ait minimum, négatif pour qu'il y ait maximum, tantôt positif et tantôt négatif, pour qu'il n'y ait ni maximum ni minimum. En effet, la fonction $f(x + Ht, y + Kt, z + Lt)$ sera, pour $t = 0$, constamment minimum dans le premier cas, constamment maximum dans le second, et enfin, dans le troisième, minimum pour certains rapports mutuels de H, K, L et maximum pour d'autres, ce qui, donnant des catégories de va-

leurs $f(x+h, y+k, z+l)$ supérieures à $f(x, y, z)$ et d'autres inférieures, empêchera tout à la fois $f(x, y, z)$ d'être un maximum et d'être un minimum.

La question revient donc à trouver ce que doivent être les coefficients A, B, C, D, E, F du polynôme (5) pour que ce polynôme soit ou essentiellement positif ou essentiellement négatif.

A cet effet, supposons-le d'abord essentiellement positif, et cherchons à le décomposer en une suite de carrés. Comme, parmi les hypothèses que l'on peut faire sur h, k, l, il y a celle où un seul de ces accroissements, h par exemple, ne s'annulerait pas, le terme Ah^2 auquel le polynôme se réduirait alors est tenu d'avoir le signe *plus*. Une première condition est donc $A > 0$; ce qui permet de mettre A en facteur commun dans tous les termes de (5) où h figure, et de dédoubler ainsi l'expression (5) en deux parties, dont une seule,

$$A\left[h^2+2h\left(\frac{F}{A}k+\frac{E}{A}l\right)\right],$$

contient h. Or il suffit d'ajouter à cette première partie, dans la grande parenthèse, le carré de $\frac{F}{A}k+\frac{E}{A}l$, expression de même forme en k, l que la seconde partie, et puis (afin de ne pas altérer l'expression totale) de retrancher de la seconde partie le produit de ce même carré par A, pour avoir extrait du polynôme homogène (5) un premier carré, savoir, $A\left(h+\frac{F}{A}k+\frac{E}{A}l\right)^2$; après quoi il reste une expression

$$(6)\qquad \left(B-\frac{F^2}{A}\right)k^2+\left(C-\frac{E^2}{A}\right)l^2+2\left(D-\frac{FE}{A}\right)kl,$$

de même forme que la proposée (5), mais avec la variable h en moins. Comme, d'ailleurs, quels que soient k et l, le polynôme essentiellement positif (5) se réduit à (6) par l'hypothèse $h=-\frac{F}{A}k-\frac{E}{A}l$ annulant le carré, ce nouveau polynôme (6) n'est pas moins astreint que le proposé (5) à avoir toutes ses valeurs positives. Un raisonnement identique au précédent, mais où k jouera le rôle qu'avait h, prouvera donc qu'on doit avoir $B-\frac{F^2}{A}>0$ et permettra d'extraire de (6) un nouveau carré en k et l, laissant après lui un nouveau polynôme homogène du second degré, essentiellement positif encore, avec la variable k en moins. On continuera de même jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule variable et, par conséquent, qu'un seul terme, affecté du carré de cette variable ou ayant de lui-même (vu la nature

supposée positive de son coefficient) la forme voulue. Appelons, pour abréger, B', C', D' les coefficients respectifs figurant dans (6) et C'' le coefficient, $C' - \frac{D'^2}{B'}$, de l dans l'expression suivante qui sera ici la dernière; et le polynôme (5) aura pris la forme désirée

$$(7) \qquad A\left(h + \frac{F}{A}k + \frac{E}{A}l\right)^2 + B'\left(k + \frac{D'}{B'}l\right)^2 + C''l^2.$$

On voit, en résumé, que les conditions nécessaires pour qu'il y ait minimum de $f(x, y, z)$ seront les inégalités

$$(8) \qquad A > 0, \quad B' > 0, \quad C'' > 0,$$

en même nombre que les variables elles-mêmes x, y, z. D'ailleurs ces conditions seront suffisantes, ou entraîneront l'existence du minimum; car elles feront de l'expression (7), équivalente à (5), une somme de carrés, ne s'abaissant jusqu'à zéro que par l'annulation séparée de chaque carré, c'est-à-dire dans la multiple supposition, inadmissible,

$$l = 0, \quad k + \frac{D'}{B'}l = 0 \;\text{ ou }\; k = 0, \quad h + \frac{F}{A}k + \frac{E}{A}l = 0 \;\text{ ou }\; h = 0 \;\; [1].$$

Dans le cas du maximum, on appliquerait les mêmes considérations, après avoir changé les signes de l'expression (5) alors essentiellement négative; et l'on obtiendrait, par conséquent, comme conditions nécessaires et suffisantes, les trois inégalités, inverses des précédentes (8),

$$(9) \qquad A < 0, \quad B' < 0, \quad C'' < 0.$$

Enfin, si les premiers membres de ces inégalités se trouvaient avoir, les uns des valeurs positives, les autres des valeurs négatives, il est clair, par la démonstration même, que la fonction $f(x, y, z)$ ne serait ni maximum, ni minimum.

104. — Cas particulier de deux variables.

Étudions en particulier et directement le cas simple d'une fonction

---

[1] Cette démonstration fait voir en même temps comment un polynôme homogène du second degré peut, quand il est constamment positif, se mettre sous la forme d'une somme de carrés, forme qu'il faut, dans certaines questions de Mécanique appliquée, savoir donner au potentiel d'élasticité d'un solide, fonction homogène du second degré, essentiellement positive, des six petites déformations élémentaires du solide à l'endroit considéré.

$f(x,y)$ de deux variables. Ce sera, par exemple, l'ordonnée verticale z (ou *altitude*) d'une surface, fonction de deux coordonnées horizontales rectangulaires x et y. Désignons, comme dans une Leçon antérieure (p. 118), par p, q, r, s, t ses cinq dérivées premières et secondes $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dy^2}$. On aura d'abord, pour déterminer les valeurs de x et de y susceptibles de rendre l'ordonnée maxima ou minima, les deux équations $p=0$, $q=0$, qui expriment, conformément au principe de Fermat, l'annulation de la *pente* $\sqrt{p^2+q^2}$ de la surface aux points considérés ([1]). En outre, l'expression (5) se réduisant ici à $rh^2+2shk+tk^2$, ou bien, sauf le facteur positif h^2, au trinôme du second degré $ty'^2+2sy'+r$, dans lequel y' désigne le rapport entièrement arbitraire $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{k}{h}$, ce trinôme, fonction continue de y', aura, pour toutes les valeurs de y', le signe $+$ ou $-$ de son premier coefficient t, s'il ne passe jamais par zéro, c'est-à-dire si les racines de l'équation du second degré obtenue en l'annulant sont imaginaires, ou que l'on ait

$$(10) \qquad rt-s^2>0;$$

ce qui fait bien, comme on sait, du premier membre de l'équation, le produit de la somme de deux carrés par ± 1. Ainsi, l'inégalité (10) constitue une condition commune, nécessaire et suffisante, pour qu'il y ait maximum ou minimum. Quand elle se trouve vérifiée, le produit rt des deux dérivées secondes directes, dépassant le carré s^2 de la dérivée seconde oblique, est positif, et les deux dérivées secondes directes ont même signe : il y a donc minimum si elles sont positives, maximum si elles sont négatives. Lorsque, au contraire, r et t ont leurs signes différents, ou le même signe mais avec un produit inférieur à s^2, on n'obtient ni maximum ni minimum, la surface ayant ses points voisins du proposé (x, y, z) les uns, au-dessus, mais, les autres, au-dessous de son plan tangent horizontal mené en (x, y, z) et qui, par suite, la coupe.

Il arrive d'ailleurs souvent, comme dans les cas d'une seule variable indépendante, que la nature de la question met en évidence l'existence du minimum ou celle du maximum et rend inutile la discussion pré-

[1] On a vu à la p. 61* (du second fascicule) que l'expression $\sqrt{p^2+q^2}$ mesure bien en chaque point la pente de la surface; et ce sera, du reste, démontré aussi dans le premier fascicule, au n° 179 (formule 15).

cédente; en sorte qu'il suffit de déterminer, par une application soit géométrique, soit analytique, du principe de Fermat, la situation et puis la valeur de ce minimum ou maximum. C'est ce que je montrerai dans la prochaine Leçon sur quelques exemples, dont les premiers se traiteront géométriquement et les autres analytiquement.

ONZIÈME LEÇON.

SUITE DE LA THÉORIE DES MAXIMA ET DES MINIMA : *MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS; *THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE; MAXIMA ET MINIMA RELATIFS, ETC.

---

103. — Distance minimum d'un point à une surface; distance minimum de deux courbes ou surfaces.

La droite qui joint un point fixe A aux divers points d'une surface donnée SS' est fonction des deux coordonnées indépendantes, x et y par exemple, de son extrémité située sur la surface. Sa valeur minimum AM s'obtiendra, d'après la méthode indiquée au commencement de l'avant-dernier numéro (p. 170), en considérant qu'elle est également minimum dans toutes les fonctions d'une seule variable déduites de la proposée par un choix arbitraire de la manière de faire varier simultanément x et y, manière qu'exprimera une courbe correspondante. CMB, ou EMD, etc., tracée sur la surface par le point M, et représentant en projection sur le plan des xy la relation voulue entre x et y. Autrement dit, AM sera la plus courte distance du point A à toutes les courbes CB, ED, ... qui se croisent en M sur la surface, et, vu la propriété démontrée plus haut (p. 167) de cette plus courte distance, elle coupera perpendiculairement leurs tangentes issues de M, dont le lieu est (p. 95) le plan tangent en M à la surface. Autrement dit, *la droite minima demandée sera une normale menée du point* A *à la surface.*

Fig. 20.

Considérons actuellement la droite MM' de jonction de deux points pris respectivement sur deux lignes données AB, A'B'. Si l'on adopte comme variables indépendantes les arcs AM $= s$, A'M' $= s'$ qui définissent sur les deux lignes les situations de M et M', la droite mobile MM' sera une fonction, $f(s, s')$, de ces deux arcs, et le principe de Fermat, appliqué à cette fonction en y faisant varier séparément s ou s', montrera que la distance minima des deux lignes est mesurée par une normale commune aux deux.

Fig. 21.

On reconnaîtrait de même que la droite la plus courte menée entre une ligne et une surface ou entre deux surfaces est une normale commune aux deux figures.

106*. — Méthode des moindres carrés.

(Compléments, p. 138*.)

107*. — Exemple de minima obtenus, dans une fonction de deux variables, sans qu'on ait besoin de calculer celles-ci.

(Compléments, p. 144*.)

108*. Application à la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre.

(Compléments, p. 150*.)

109. — Des maxima et des minima relatifs : règle générale.

Soit $f(x, y, z, u, v)$ une fonction de plusieurs variables. Chacun de ses maxima et de ses minima étudiés jusqu'ici, ou qui est soit plus grand, soit plus petit que toutes les valeurs de la fonction obtenues en faisant varier très peu tout autour, mais de toutes les manières possibles, les variables x, y, z, u, v, s'appelle un maximum ou un minimum *absolu*; et l'on donne, par opposition, le nom de maximum ou minimum *relatif* à une valeur de la fonction qui est ou plus grande, ou plus petite, que certaines catégories seulement de valeurs voisines, se succédant avec continuité, à côté d'elle, dans au moins deux sens opposés. Imaginons, par exemple, que l'on considère une portion plus ou moins étendue de la surface terrestre, et qu'on parte d'un *col*, c'est-à-dire d'un point situé, entre deux montagnes, à l'origine supérieure de deux vallées de sens contraires. L'*altitude* (hauteur verticale de la surface terrestre au-dessus d'une surface horizontale fixe) va évidemment en croissant, quand on s'élève de là vers l'une ou vers l'autre des montagnes, en décroissant, quand on descend au contraire vers l'une ou l'autre des deux vallées : ainsi, elle n'est, sur le col, ni un maximum absolu, ni un minimum absolu. Mais elle y serait un *minimum relatif*, si l'on convenait de n'aller, en passant par le col, que d'une montagne à l'autre; et un *maximum relatif*, si l'on convenait de se rendre seulement d'une vallée dans l'autre.

Les catégories de valeurs auxquelles on se borne sont définies par les manières particulières dont y varient simultanément x, y, z, u, v, c'est-à-dire par certaines relations entre les variables de $f(x, y, z, u, v)$.

Pour fixer les idées, nous supposerons ces relations au nombre de deux, et susceptibles d'être prises sous la forme

$$(34) \qquad \varphi(x, y, z, u, v) = 0, \qquad \psi(x, y, z, u, v) = 0,$$

φ, ψ désignant des fonctions continues, et à dérivées premières continues, de x, y, z, u, v. Par conséquent, dès que x, y, z, u, v changeront, leurs différentielles devront elles-mêmes vérifier les deux relations $d\varphi = 0$, $d\psi = 0$, ou

$$(35) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} dx + \dfrac{d\varphi}{dy} dy + \dfrac{d\varphi}{dz} dz + \dfrac{d\varphi}{du} du + \dfrac{d\varphi}{dv} dv = 0, \\ \dfrac{d\psi}{dx} dx + \dfrac{d\psi}{dy} dy + \dfrac{d\psi}{dz} dz + \dfrac{d\psi}{du} du + \dfrac{d\psi}{dv} dv = 0. \end{cases}$$

Dans ces conditions, la recherche des maxima et minima relatifs de $f(x, y, z, u, v)$ deviendra évidemment celle de maxima et minima absolus, si, tirant des équations (34) deux des variables en fonction des autres, u et v, par exemple, en fonction de x, y, z [ou, par suite, de (35), du et dv en fonction de dx, dy, dz], nous imaginons que l'on porte ces valeurs de u, v dans l'expression de f, de manière à transformer celle-ci en une fonction des trois variables, restées complètement indépendantes, x, y, z. Or, d'après le principe de Fermat, les équations propres à déterminer x, y, z, dans un cas prévu de maximum ou de minimum, se formeront en exprimant l'annulation, quelques rapports qu'aient entre eux dx, dy, dz, de la différentielle totale df, c'est-à-dire en écrivant la relation

$$(36) \qquad \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz + \frac{df}{du} du + \frac{df}{dv} dv = 0,$$

où il est entendu que du et dv sont les fonctions de dx, dy, dz déterminées par les conditions (35). Nous pourrions donc résoudre par rapport à du et à dv les deux équations du premier degré (35), puis substituer les valeurs ainsi trouvées, linéaires en dx, dy, dz, dans (36), et annuler alors séparément les coefficients totaux des trois différentielles indépendantes dx, dy, dz, pour avoir entre x, y et z, conformément aux indications données précédemment (p. 172), les trois équations cherchées. Mais cette élimination de du et dv entre (35) et (36) conduit à des équations générales plus symétriques quand on y introduit, comme il suit, des inconnues auxiliaires λ, μ en même nombre que les équations de condition (34).

Ajoutons à (36) les deux relations (35), après les avoir respectivement multipliées par ces inconnues auxiliaires λ, μ, que nous nous

réservons de déterminer ultérieurement de manière à simplifier le plus possible les résultats. Il viendra

$$(37)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{df}{dx} + \lambda \frac{d\varphi}{dx} + \mu \frac{d\psi}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dy} + \lambda \frac{d\varphi}{dy} + \mu \frac{d\psi}{dy}\right) dy \\ &+ \left(\frac{df}{dz} + \lambda \frac{d\varphi}{dz} + \mu \frac{d\psi}{dz}\right) dz + \left(\frac{df}{du} + \lambda \frac{d\varphi}{du} + \mu \frac{d\psi}{du}\right) du \\ &\qquad + \left(\frac{df}{dv} + \lambda \frac{d\varphi}{dv} + \mu \frac{d\psi}{dv}\right) dv = 0. \end{aligned} \right.$$

Or nous savons que, si les termes en dx, dy, dz figuraient seuls dans cette relation (37), nous aurions le droit d'annuler leurs coefficients; et, d'autre part, rien ne nous empêche de faire que ces termes y soient en effet seuls, car nous pouvons disposer des facteurs λ et μ de manière à faire annuler dans (37) les coefficients totaux, en même nombre, de *du* et de *dv*, coefficients du premier degré en λ, μ et dont l'annulation ne conduit ainsi qu'à résoudre un système d'équations du premier degré. Nous aurons donc, en définitive, des équations de maximum ou de minimum pouvant s'écrire, sous forme condensée,

$$(38)\quad \frac{df}{d(x, y, z, u, v)} + \lambda \frac{d\varphi}{d(x, y, z, u, v)} + \mu \frac{d\psi}{d(x, y, z, u, v)} = 0$$

et dont le nombre sera juste celui des inconnues proposées x, y, z, u, v. En les joignant aux conditions (34), en même nombre que les inconnues auxiliaires λ, μ, il viendra bien un système d'autant d'équations que d'inconnues, après la résolution duquel la valeur maxima ou minima $f(x, y, z, u, v)$, supposée prévue (quant à son existence), se calculera sans difficulté.

Or on se serait évidemment trouvé conduit aux équations (38), si, toutes les variables x, y, z, u, v étant censées indépendantes, on avait cherché le maximum ou le minimum de la fonction $f + \lambda\varphi + \mu\psi$, formée par l'addition, à la proposée $f(x, y, z, u, v)$, des premiers membres des équations de condition $\varphi = 0$, $\psi = 0$ multipliés par tout autant de facteurs constants inconnus λ, μ, en se réservant de déterminer ultérieurement ces facteurs au moyen des équations de condition elles-mêmes. Nous pouvons donc énoncer la règle suivante, dite *règle des maxima ou minima relatifs*, dont la démonstration était le but que nous poursuivions ici :

Le maximum ou le minimum relatif d'une fonction f, dont les variables sont liées par des équations de condition $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ...

s'obtient en opérant comme quand on cherche un maximum ou minimum absolu, supposé exister, de l'expression $f + \lambda\varphi + \mu\psi + \ldots$ *dans laquelle* λ, μ, … *désignent certaines constantes à éliminer ou à déterminer finalement par les équations même* $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ….

On remarquera que, si λ, μ, au lieu de se prendre constants, étaient assimilés, comme x, y, z, u, v, à des variables indépendantes, il faudrait joindre aux équations (38), pour trouver un maximum ou minimum absolu de $f + \lambda\varphi + \mu\psi$, celles que donnerait l'annulation des dérivées partielles, φ, ψ, de cette fonction par rapport à λ et à μ; de sorte que l'on obtiendrait ainsi toutes les équations nécessaires pour calculer x, y, z, u, v, λ, μ, y compris même les *conditions* $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Mais, comme celles-ci sont explicitement données, il n'est pas nécessaire de chercher à les obtenir, et l'on peut se borner à regarder les facteurs indéterminés λ, μ comme constants.

110. — Exemple : décomposition d'un nombre donné en parties $x, y, z, \ldots$ telles, que le produit $x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$ soit maximum.

Comme exemple, cherchons le maximum relatif du produit (que nous bornerons, pour fixer les idées, à trois facteurs) $f = x^\alpha y^\beta z^\gamma$, où α, β, γ désignent des exposants positifs donnés et x, y, z des quantités positives en même nombre, dont la somme doit avoir une valeur connue A. Ce maximum existe bien; puisque, x, y, z étant compris entre zéro et A, le produit $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, compris lui-même entre zéro et $A^{\alpha+\beta+\gamma}$, reçoit nécessairement une valeur que nulle autre ne dépasse, pour des valeurs de x, y, z différentes de zéro, tandis qu'il décroît jusqu'à s'annuler si, de part et d'autre de ces valeurs de x, y, z, celles d'entre les variables qu'on choisit indépendantes viennent à changer dans des rapports quelconques, mais assez pour que quelqu'une d'elles s'annule ou fasse annuler la dernière partie (seule non indépendante), x, y ou z, de A.

Il est évident que le principe de Fermat et, par suite, la règle précédente, s'appliquent à ces valeurs de x, y, z qui rendent ainsi la fonction f la plus grande possible. Les équations de condition se réduisant à $x + y + z - A = 0$, nous devrons opérer comme si nous cherchions le maximum absolu de $f + \lambda(x + y + z - A)$; et les relations (38) deviendront

$$\frac{df}{dx} + \lambda = 0, \qquad \frac{df}{dy} + \lambda = 0, \qquad \frac{df}{dz} + \lambda = 0.$$

Elles donneront donc, par l'élimination de λ, les équations de maxi-

mum

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = \frac{df}{dz}. \tag{39}$$

Or, f étant le produit $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, ses dérivées partielles sont respectivement $\frac{\alpha}{x}f$, $\frac{\beta}{y}f$, $\frac{\gamma}{z}f$. Par conséquent, si l'on supprime de tous les membres de (39) le facteur commun f, qui a sa valeur considérée différente de zéro, et qu'on renverse les rapports restants, il vient

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}. \tag{40}$$

Ainsi, *le produit $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ est maximum, quand on partage le nombre proposé* A *en parties x, y, z proportionnelles respectivement aux exposants donnés α, β, γ.*

Dans le cas particulier le plus simple, celui où $\alpha = \beta = \gamma = 1$, l'égalité continue (40) devient $x = y = z$. Donc, *pour partager une quantité positive en un nombre donné de parties qui aient leur produit maximum, il faut prendre toutes ces parties égales entre elles*

DOUZIÈME LEÇON.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL : THÉORIE DU CONTACT DES COURBES PLANES; ÉTUDE DE LEURS DROITES OSCULATRICES, DE LEUR CONCAVITÉ OU CONVEXITÉ ET * DE LEURS POINTS SINGULIERS.

---

111. — Aperçu des applications géométriques du Calcul différentiel en ce qui concerne les courbes planes : triangle infinitésimal.

Il me reste à exposer les principales applications du Calcul différentiel à la théorie générale des courbes soit planes, soit gauches ou non contenues dans un même plan, et à celle des surfaces courbes. Les plus simples ont déjà été, ou traitées avec les détails qu'elles méritent, ou du moins indiquées, à propos de la représentation des fonctions et de leurs dérivées. C'est ainsi que, pour nous borner d'abord aux courbes planes, une fonction quelconque $y = f(x)$ d'une seule variable, fonction soit explicite, soit implicite ou définie par une équation de la forme $F(x, y) = c$, nous a conduit, en regardant x comme une abscisse et y comme une ordonnée dans le plan, à considérer une courbe qui en dépeint toute la marche, et dont, en particulier, la tangente en chaque endroit (pp. 31 et 47*) représente la manière actuelle de varier de la fonction, c'est-à-dire sa dérivée première ou pente, tandis que le cercle osculateur de la même courbe (pp. 66* et 68*) exprime de plus la dérivée seconde de la fonction, c'est-à-dire la manière actuelle dont varie sa pente (¹). Et la courbe considérée peut être d'ailleurs une courbe plane quelconque, prise elle-même, grâce à l'adjonction d'axes coordonnés des x et des y, comme définition de la fonction $y = f(x)$.

Nous avons vu en outre (pp. 44 et 46) comment l'arc s de la courbe, compté à partir d'un point arbitraire de celle-ci et positivement dans le sens des abscisses croissantes, constitue une nouvelle fonction de x, liée à y, en coordonnées rectangulaires, par la relation $s' = \sqrt{1 + y'^2}$

(¹) Cette notion essentielle du cercle osculateur n'a été donnée, il est vrai, que dans le fascicule II; mais elle se présentera bientôt, non moins naturellement, dans ce premier fascicule.

existant entre leurs dérivées. Cette formule a été obtenue comme cas particulier d'une autre, résultant immédiatement (p. 45), pour une courbe quelconque de l'espace, d'une figure où l'accroissement très petit de l'arc, Δs, susceptible d'être confondu avec la corde correspondante, se présente comme la diagonale d'un parallélépipède, dont les arêtes, dans les sens des trois axes, sont les accroissements simultanés Δx, Δy, Δz des trois coordonnées. Mais, quand on veut l'avoir directement pour une simple courbe du plan des xy, la figure peut être réduite au triangle MHM' de la page 30, où, seulement, pour exprimer l'intention de passer à la limite, les deux côtés $\text{MH} = \Delta x$, $\text{HM}' = \Delta y$, parallèles aux axes, deviennent les deux différentielles dx, dy de l'abscisse et de l'ordonnée, et où, par suite, le troisième côté MM', corde infiniment petite, devient à la fois l'élément suivant, ds, de l'arc et le premier élément de la tangente MT. Si les axes sont rectangulaires, l'angle H du triangle est droit, et, en observant que tang HMM', devenue tang HMT, est la pente de la courbe, le triangle donne de suite

$$(1) \qquad \text{Pente} = \frac{dy}{dx}, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ou bien, par la substitution de $y' dx$ et de $s' dx$ à dy et à ds,

$$(2) \qquad \text{Pente} = y', \qquad s' = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Le triangle qui a ainsi pour côtés dx, dy, ds a reçu le nom de *triangle infinitésimal* : il montre l'élément ds de la courbe dans ses rapports tant de direction que de grandeur avec les éléments dx, dy des coordonnées, et nous met en quelque sorte sous les yeux la loi même de génération de la courbe point par point. Barrow, géomètre anglais du XVIIe siècle, paraît en avoir, le premier, fait un grand usage et signalé toute l'importance.

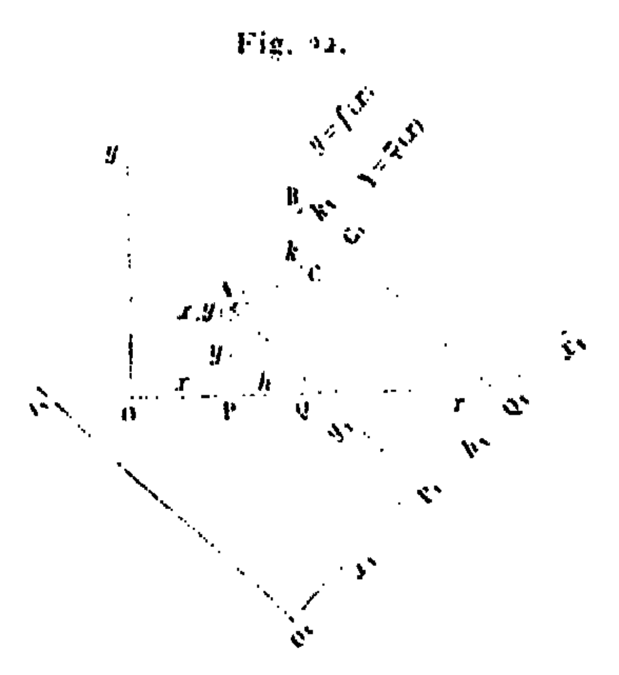
Nous avons obtenu la tangente et le cercle osculateur d'une courbe comme les limites respectives d'une droite et d'une circonférence qui auraient avec la courbe le plus grand nombre possible de points communs, répondant à des abscisses équidistantes dont on fait tendre l'intervalle vers zéro. Nous avons vu qu'il résulte, à la limite, de cette communauté de deux ou de trois ordonnées successives dans la courbe et dans la droite ou le cercle, l'égalité, au point final de contact, de la première, y', ou des deux premières, y' et y'', des dérivées de l'ordonnée y par rapport à l'abscisse x, dans cette même courbe et dans la droite ou le cercle ; et l'on en déduit immédiatement, d'après la notion, développée plus haut (p. 145), du contact de deux fonctions,

que l'ordonnée de la courbe et celle de la droite ou du cercle en question sont deux fonctions de l'abscisse ayant, pour la valeur de x qui correspond au point commun, un contact du premier ordre au moins s'il s'agit de la tangente et du second ordre au moins s'il s'agit du cercle. Or on a eu l'idée de généraliser ces divers faits : et il en est résulté une théorie. des *contacts de lignes* planes et des *courbes osculatrices*, qui est comme le centre auquel se rattachent les autres théories générales sur les courbes planes. C'est donc par l'étude des contacts de courbes et des lignes osculatrices que j'aborderai une nouvelle série de questions.

112. — Théorie générale des contacts de courbes planes : conditions et signification d'un contact d'ordre n.

Soient données, par leurs équations $y = f(x)$, $Y = \varphi(x)$, deux courbes AB, AC rapportées à un axe, Ox, d'abscisses x, et à un axe, Oy, d'ordonnées, appelées y pour l'une des courbes et Y pour l'autre. On dira que ces deux courbes ont, en un point commun A, ou pour la valeur correspondante x de l'abscisse, un *contact d'ordre n*, si les

Fig. 22.



fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ exprimant leurs ordonnées y présentent elles-mêmes un tel contact, défini comme il a été fait dans une précédente Leçon (p. 143), c'est-à-dire si, en donnant à l'abscisse, à partir du point commun A (x, y), un accroissement infiniment petit positif ou négatif PQ $= h$, et construisant la parallèle indéfinie QB à l'axe des y, l'*écart* sur cette parallèle, BC $= k$, des deux courbes, écart égal à la différence $f(x+h) - \varphi(x+h)$ de leurs ordonnées correspondantes BQ et CQ, est infiniment plus petit que la puissance $n^{\text{ième}}$, h^n.

de la variation simultanée h éprouvée par l'abscisse, mais n'est pas infiniment petit par rapport à la puissance entière suivante, h^{n+1}, de la même variation.

D'après une démonstration du n° 92 (pp. 144 à 146), *un tel contact d'ordre n se produira aux conditions, nécessaires et suffisantes, qu'il y ait, pour la valeur désignée x de l'abscisse, égalité respective des ordonnées y, Y des deux courbes et de leurs n premières dérivées par rapport à l'abscisse, comparées chacune à chacune, avec inégalité des deux dérivées suivantes, de l'ordre $n+1^{\text{ième}}$.* Autrement dit, on doit pouvoir écrire

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(au point commun)} \\ y = Y, \quad y' = Y', \quad y'' = Y'', \quad \ldots, \quad y^{(n)} = Y^{(n)}, \quad y^{(n+1)} \gtrless Y^{(n+1)}. \end{array} \right.$$

Et il suffit, en particulier, que le contact soit du premier ordre, pour que les deux courbes aient même tangente au point commun, les coefficients angulaires respectifs y', Y' s'y confondant.

D'ordinaire, le rapport de k à h^{n+1} ne croît pas indéfiniment pour $h=0$, quand il y a contact d'ordre n, et l'écart k, ou $f(x+h)-\varphi(x+h)$, des deux courbes, est le produit de h^{n+1} par une certaine fonction $\psi(h)$ qui, à la limite $h=0$, reste finie et ne s'annule pas. Posons ainsi, pour toutes les valeurs (petites ou grandes) de h devenue maintenant la variable indépendante, $k = h^{n+1}\psi(h)$; et l'ordonnée de l'une des deux courbes, de AB par exemple, pourra s'écrire

$$\varphi(x+h) + h^{n+1}\psi(h).$$

Or appelons, d'une part, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, $n+1$ très petits paramètres indépendants, que nous ferons tendre vers zéro, et, d'autre part, $\Phi(x+h)$, $\Psi(h)$ des fonctions de forme variable, mais tendant vers $\varphi(x+h)$ et $\psi(h)$ en même temps que les paramètres précédents ε vers zéro; de sorte que les deux valeurs, $\varphi(x+h)$, $\varphi(x+h)+h^{n+1}\psi(h)$, des ordonnées quelconques $\varphi(x+h)$, $f(x+h)$ des courbes proposées AC, AB, soient les limites respectives des expressions

$$(4)\quad \Phi(x+h) \text{ et } \Phi(x+h) + (h-\varepsilon_0)(h-\varepsilon_1)(h-\varepsilon_2)\ldots(h-\varepsilon_n)\Psi(h).$$

Imaginons que l'on construise les deux courbes variables dont ces dernières expressions représentent les ordonnées et dont les deux courbes proposées AC, AB sont évidemment les limites. Comme le dernier terme de (4) s'annule pour $h=\varepsilon_0, =\varepsilon_1, \ldots, =\varepsilon_n$, la seconde de ces courbes variables aura ses $n+1$ points, répondant aux abscisses $x+h$ très peu différentes $x+\varepsilon_0$, $x+\varepsilon_1$, $\ldots$, $x+\varepsilon_n$, communs avec la première des deux mêmes courbes; et leurs pentes, dé-

finies par les dérivées de (4) en h, différeront d'ailleurs en tous ces points communs, qui seront ainsi des points d'intersection. Donc, *deux courbes en contact d'ordre n sont les limites respectives de courbes variables, se coupant mutuellement en $n+1$ points arbitrairement répartis sur un très petit espace et qui tendent à se réunir en un seul, savoir, au point de contact proposé.* D'une manière plus brève, on dira qu'*un point de contact de l'ordre n équivaut à $n+1$ points communs infiniment voisins.*

Réciproquement, quand deux courbes variables, ayant pour ordonnées, comme les précédentes, des fonctions $F(x)$, $\Phi(x)$ *de l'abscisse continues et à dérivées des n premiers ordres continues, présentent $n+1$ points communs tendant à se confondre en un seul, leurs deux limites respectives,* dont je prendrai les équations sous les formes $y=f(x)$ et $Y=\varphi(x)$, *ont, en ce point unique, un contact généralement de l'ordre n.* Car, si l'on considère, pour chaque abscisse x, l'écart mutuel $h=F(x)-\Phi(x)$ des deux courbes variables, supposées devenues très voisines de leurs limites, cet écart s'annule, par hypothèse, $n+1$ fois sur une très petite étendue : d'où il suit, d'après le théorème de Rolle (p. 35), que sa dérivée première, $F'(x)-\Phi'(x)$, s'y annule au moins n fois, sa dérivée seconde, $F''(x)-\Phi''(x)$, au moins $n-1$ fois, etc., jusqu'à la dérivée $n^{\text{ième}}$, qui s'y annule au moins une fois. Donc, à la limite, où toute l'étendue en question se réduit à un point et où cependant, par hypothèse, les fonctions $F(x)$, $\Phi(x)$, devenues $f(x)$, $\varphi(x)$, ne cessent pas d'être continues non plus que leurs n premières dérivées, les $n+1$ différences $f(x)-\varphi(x)$, $f'(x)-\varphi'(x)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x)-\varphi^{(n)}(x)$ sont nulles au point commun; ce qui revient bien à écrire les $n+1$ premières des relations (3). Et quant à la $(n+2)^{\text{ième}}$, consistant dans l'inégalité $f^{(n+1)}(x)-\varphi^{(n+1)}(x)\gtrless 0$, on peut la supposer vérifiée en général d'elle-même, vu la rareté de l'annulation d'une grandeur quelconque, telle que $f^{(n+1)}(x)-\varphi^{(n+1)}(x)$, quand rien n'a été disposé expressément pour la réduire à zéro. Si néanmoins ce cas tout exceptionnel se produisait, l'ordre du contact dépasserait le $n^{\text{ième}}$.

113. — L'ordre d'un contact est indépendant du choix des axes.

Comme les deux lignes données, en contact d'ordre n, sont les limites de certaines courbes variables dont $n+1$ points d'intersection tendent à se confondre, et comme, en outre, ces limites de deux courbes se coupant coup sur coup $n+1$ fois ont un contact au moins de l'ordre n, quelle que soit leur disposition par rapport aux axes, sous l'unique ré-

serve que les ordonnées $F(x)$, $\Phi(x)$ forment deux fonctions continues et à n dérivées continues, il en résulte que *l'ordre du contact est indépendant du choix des axes, ou constitue un caractère inhérent au système des deux courbes.* Il ne pourrait, en effet, devenir supérieur à n par rapport à certains axes, qu'on supposerait aussitôt avoir été pris comme axes primitifs des x et des y, sans qu'il atteignît, par le fait même, cette valeur plus élevée dans tous les autres systèmes d'axes. Aussi avons-nous trouvé (pp. 67* et 73*) que le cercle osculateur en un point d'une courbe restait le même quand l'orientation des axes changeait; et le fait analogue aurait été évident pour la tangente, simple prolongement d'une corde infiniment petite.

Il faut toutefois, à cause de la réserve indiquée, éviter de prendre pour axe des ordonnées une parallèle à la tangente commune menée en A (p. 185); ce qui, d'ailleurs, rendant infinis, dans les relations (3), les coefficients angulaires y', Y', ainsi que les dérivées suivantes y'', Y'', ..., ôterait toute signification précise à ces conditions (3). Et, en effet, avec un tel axe des y, les courbes variables dont AB et AC sont les limites se trouveraient évidemment (si voisines qu'on les supposât de ces limites) coupées en plusieurs endroits, très près de A, par certaines ordonnées, et en un seul endroit ou pas du tout par d'autres: de sorte que les ordonnées ne constitueraient pas, comme on l'a admis dans la démonstration, deux séries de valeurs $F(x)$, $\Phi(x)$ uniques et continues.

Les raisonnements précédents, un peu sommaires, sont confirmés, dans leur résultat concernant la persistance de l'ordre des contacts, par une construction très simple. Prenons dans la figure ci-dessus (p. 185) deux nouveaux axes quelconques O_1x_1, O_1y_1, par rapport auxquels les deux coordonnées du point commun A seront $x_1 = O_1P_1$, $y_1 = P_1A$; et construisons, pour l'arc AB, déjà considéré, de l'une des courbes, le nouvel accroissement $h_1 = P_1Q_1$ de l'abscisse et le nouvel écart $k_1 = BC_1$ des deux lignes AB, AC. En général, les deux axes Oy, O_1y_1 des ordonnées ont une direction différente de celle de la tangente commune menée en A aux deux courbes, et, par suite, une direction également différente de celles des deux cordes AB, CC_1, infiniment petites, ou très voisines de leur limite (pour $h = 0$) confondue en A avec la tangente commune. Donc, d'une part, la corde AB, joignant, sous des angles finis, soit les deux parallèles AP et BQ, soit les deux parallèles AP_1 et BQ_1, est évidemment du même ordre que les droites PQ ou h, et P_1Q_1 ou h_1, qui joignent pareillement, sous des angles finis, l'un ou l'autre de ces deux systèmes de parallèles; en sorte que h_1 est comparable à h, ou égale le produit de h par un cer-

tain nombre a ne tendant pas vers zéro ni ne grandissant indéfiniment. D'autre part, le rapport des deux écarts $BC_1 = k_1$ et $BC = k$ est, dans le triangle BCC_1, celui des sinus des angles opposés C et C_1, sinus de grandeur sensible, puisque la corde CC_1 ne tend pas à se confondre, en direction, avec les parallèles BC, BC_1 aux axes Oy, O_1y_1 des ordonnées : par conséquent, le rapport de k_1 à k est encore un certain nombre b, fini comme a. Et puisque l'on a ainsi $h_1 = ah$, $k_1 = bk$, les rapports $\frac{k_1}{h_1^n}$, $\frac{k_1}{h_1^{n-1}}$, respectivement égaux à $\frac{b}{a^n}\frac{k}{h^n}$, $\frac{b}{a^{n-1}}\frac{k}{h^{n-1}}$, ou comparables à $\frac{k}{h^n}$, $\frac{k}{h^{n-1}}$, sont ou non infiniment petits en même temps que ces derniers. C'est bien dire que le contact atteint précisément le même ordre dans les deux cas.

111. — Contacts d'ordre pair et contacts d'ordre impair.

Enfin, *les contacts d'ordre impair se distinguent de ceux d'ordre pair par un caractère important : les courbes s'y touchent sans se croiser, alors qu'elles se coupent dans les contacts d'ordre pair*, comme aurait pu porter à le penser le fait ordinaire d'une *simple intersection*, qui peut, par extension, être assimilée à un contact de l'ordre *pair* $n = 0$. Cette différence résulte de ce que l'ordre du contact est le même pour les deux courbes que pour les deux fonctions $y = f(x)$, $Y = \varphi(x)$, exprimant leurs ordonnées, et de ce que (p. 147) celle des deux fonctions qui était la plus grande pour les petites valeurs négatives de h reste également la plus grande, ou devient au contraire la moindre, pour les petites valeurs positives de h, suivant que l'ordre est impair ou pair. Celle des deux courbes qui, avant d'arriver au point commun, se trouvait au-dessus de l'autre, ou du côté des y positifs par rapport à elle, reste donc encore au-dessus après ce point, dans le premier cas, mais passe au-dessous, du côté des y négatifs, dans le second. Ajoutons que, lorsque l'ordre est impair, celle-là des deux fonctions ou des deux ordonnées est la plus grande, dans tout le voisinage du point de contact, pour laquelle la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$, $y^{(n+1)}$ ou $Y^{(n+1)}$, par rapport à l'abscisse, est elle-même la plus grande en ce point, comme on voit par la même démonstration (p. 146), où l'excédent, $\psi(h)$, de l'ordonnée dont il s'agit, sur l'autre, a le signe de $h^{n+1}\psi^{(n+1)}(h)$ et est bien alors positif.

La différence en question se déduit encore de ce fait que les deux courbes proposées, en contact d'ordre n, ne peuvent nulle part s'écarter d'une manière appréciable de deux courbes variables dont elles constituent les positions limites, et qui, elles-mêmes, sont à des dis-

tances sensibles l'une de l'autre tant avant qu'après $n+1$ points d'intersection qu'elles présentent sur une étendue infiniment petite. Quand n est impair, le nombre $n+1$ des intersections est pair, et chacune des deux courbes, traversant et retraversant l'autre un nombre pareil de fois, se retrouve, par rapport à elle, lorsqu'elle s'en éloigne enfin notablement, du côté même où elle était avant la première rencontre; de sorte que leurs limites, tenues de les suivre d'infiniment près, ne pourront manquer d'être, chacune, tout entière d'un même côté de l'autre, dans le voisinage du point de contact où seront venus se confondre tous ceux d'intersection; et elles ne se croiseront pas. Le contraire arrivera si n est pair : car, après les $n+1$ intersections, alors en nombre impair, chaque courbe restera, par rapport à l'autre, du côté où elle n'était pas avant de la rencontrer, et il y aura croisement définitif, subsistant inévitablement dans les deux courbes limites.

115. — Des courbes osculatrices; leur utilité.

Supposons maintenant qu'on donne une courbe quelconque $y=f(x)$ et considérons, d'autre part, dans son plan, une ligne variable d'une espèce déterminée, ou représentée par une équation d'une certaine forme $\varphi(x, y, a, b, c, \ldots)=0$ avec $n+1$ paramètres indéterminés $a, b, c, \ldots$, comme seraient, par exemple, une droite mobile, exprimée par la relation $y-ax-b=0$, un cercle d'une situation et d'une grandeur arbitraires, ayant en coordonnées rectangles l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2-c^2=0$, enfin, pour passer à des sortes de courbes moins simples, la conique la plus générale, exprimée, avec cinq coefficients arbitraires a, b, c, d, e, par la relation $ay^2+2bxy+cx^2+dy+ex-1=0$. On peut se proposer de choisir, parmi toutes ces courbes variables $\varphi(x, y, a, b, c, \ldots)=0$, celle qui, pour une abscisse donnée x, présente le contact le plus élevé avec la courbe fixe $y=f(x)$; car il suffira, pour cela, de disposer des paramètres $a, b, c, \ldots$ de manière que les conditions (3) d'un tel contact soient satisfaites, en égalant d'abord à $f(x)$, pour la valeur assignée de x, l'expression de y que donne l'équation $\varphi(x, y, a, b, c, \ldots)=0$, puis à $f'(x)$ la dérivée première de cette expression, à $f''(x)$ sa dérivée seconde, etc. Comme on devra poser ainsi $n+1$ équations avant d'avoir déterminé les $n+1$ inconnues $a, b, c, \ldots$, la dérivée $n^{\text{ième}}$, $y^{(n)}$, sera la dernière qu'on égalera, dans la courbe $y=f(x)$ et dans la ligne variable, pour achever de fixer celle-ci, en sorte que le contact atteindra le $n^{\text{ième}}$ ordre. Mais il ne dépassera généralement pas cet ordre; car une coïncidence

bien extraordinaire pourrait seule, sans qu'on eût rien fait pour cela, amener l'égalité respective, dans les deux courbes, d'une ou surtout de plusieurs dérivées suivantes.

La ligne particulière $\varphi(x, y, a, b, c, \ldots) = 0$ que l'on obtient de cette manière, ou qui a en (x, y), avec la proposée $y = f(x)$, le contact le plus intime possible, est dite, pour cette raison, l'*osculatrice* de cette courbe au point désigné (x, y). Et, en effet, c'est bien ainsi que nous avons déterminé le cercle osculateur (p. 65*), savoir, en lui faisant acquérir, avec la courbe $y = f(x)$, trois points communs infiniment voisins, autant qu'il était possible ou qu'il en faut pour déterminer une circonférence ; ce qui nous a donné dans le cercle, à l'endroit proposé, les mêmes valeurs respectives de y, y' et y'' que dans la courbe. Quant à la droite osculatrice, deux points suffisant à la déterminer, elle n'était autre que le prolongement d'une corde infiniment petite, c'est-à-dire la tangente, et l'on pouvait égaler seulement chez elle et dans la courbe l'ordonnée y, avec la pente, définie par y'.

De même que, lorsqu'on étudie une fonction dans le voisinage seulement d'une de ses valeurs, la série de Taylor permet de la représenter approximativement, quelque compliquée qu'elle soit, par un simple polynôme, d'un degré d'autant plus bas que l'approximation exigée est moindre ; de même aussi, étant donnée une courbe complexe dont on n'aurait à utiliser qu'un assez petit arc de part et d'autre d'un certain point, on construira en ce point, et on lui substituera, soit sa droite osculatrice, soit son cercle osculateur, soit sa conique osculatrice, etc., suivant que la nature de la question rendra tolérables, entre la courbe compliquée exacte et la ligne plus ou moins simple destinée à la remplacer, des écarts k du second ordre de petitesse, ou seulement du troisième, ou même seulement du cinquième, etc., par rapport à la distance au point de contact, écarts comparables à h^{n+1}, n étant l'ordre, 1, 2, 4, ..., du contact établi, et $n+1$ celui, 2, 3, 5, ..., des paramètres distincts contenus dans l'équation ou de la droite, ou de la circonférence, ou de la conique, etc. On voit par là combien peuvent être utiles les courbes osculatrices, et l'importance de leur découverte, effectuée par Leibnitz, qui en a indiqué l'application au cercle osculateur.

116. — Rapports d'une courbe avec ses droites osculatrices : convexité, concavité et inflexions de cette courbe.

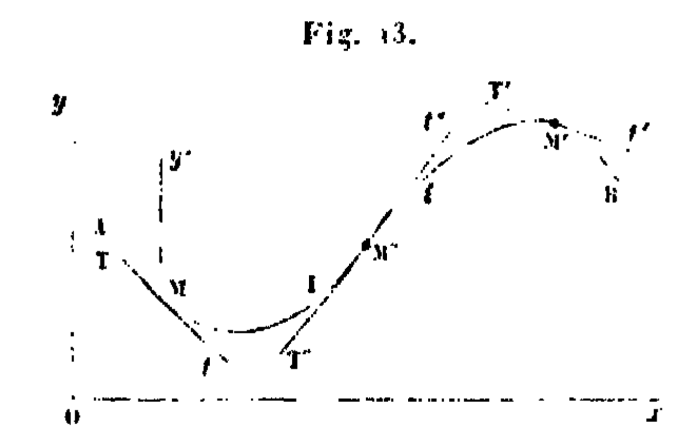
Soit toujours $y = f(x)$ l'équation de la courbe donnée, rapportée à un système quelconque d'axes rectilignes, et appelons x_1, y_1 les

coordonnées courantes, par rapport aux mêmes axes, de sa tangente ou droite osculatrice, afin de ne pas les confondre avec celles, x, y, du point de contact. La droite ayant comme équation $y_1 = ax_1 + b$, son ordonnée y_1 a pour dérivée première a et, pour toutes ses dérivées suivantes, zéro. Les deux paramètres a et b devront donc se déterminer de manière que, pour la valeur $x_1 = x$ de l'abscisse, l'expression $ax_1 + b$, de l'ordonnée, égale y ou $f(x)$, et, sa dérivée a, y' ou $f'(x)$. Cela donne les deux relations $a = y'$, $ax + b = y$, qui, résolues en a, b, deviennent $a = y'$, $b = y - y'x$ et changent bien l'équation $y_1 = ax_1 + b$ de la droite en celle (p. 31) de la tangente demandée

$$y_1 = y'x_1 + y - y'x \qquad \text{ou} \qquad y_1 - y = y'(x_1 - x).$$

La dérivée seconde de l'ordonnée au point de contact est, dans la droite, zéro, dans la courbe, y'' ou $f''(x)$, quantité généralement différente de zéro. Le contact ne dépasse donc pas, en général, le premier ordre, comme il était évident, et, l'ordre en question étant impair, les deux lignes se touchent sans se croiser. Celle des deux pour laquelle la dérivée seconde de l'ordonnée, zéro ou $f''(x)$, se trouve être en ce point la plus grande, est située, par rapport à l'autre et dans tout le voisinage du point de contact, du côté des y positifs. Donc, aux endroits où l'on a y'' ou $f''(x) > 0$, comme il arrive, par exemple, en M, dans l'arc AB, la courbe est, par rapport à sa tangente Tt, du côté

Fig. 13.



des y positifs (ou de la parallèle My' à Oy), ayant par conséquent son creux de ce côté, son bombement du côté opposé des y négatifs : on dit alors qu'elle tourne sa *concavité* vers les y positifs, sa *convexité* vers les y négatifs, ou qu'elle est *concave* vers les y positifs, *convexe* vers les y négatifs. Aux endroits où l'on a, au contraire, y'' ou $f''(x) < 0$, comme en M', la courbe se trouve *au-dessous* de sa tangente ou, relativement à celle-ci, du côté des y négatifs, et elle présente sa concavité de ce côté, sa convexité vers les y positifs.

Reste le cas exceptionnel où la dérivée seconde $f''(x)$, supposée fonction continue de x, s'annule pour l'abscisse proposée x. Alors, cette dérivée se trouvant avoir la même valeur zéro dans la courbe que dans la tangente, le contact devient d'un ordre plus élevé que le premier, c'est-à-dire, en général, du deuxième; car il faudrait des circonstances bien spéciales pour que la dérivée suivante $f'''(x)$ s'annulât dans la courbe comme elle le fait dans la droite, et, cela, à l'instant même où déjà s'annule la dérivée deuxième $f''(x)$. Ainsi, aux points où $f''(x) = 0$, la courbe a, d'ordinaire, avec sa tangente, un contact du second ordre, et, comme cet ordre est pair, les deux lignes se coupent : *la courbe y est croisée par sa tangente*. C'est ce qui arrive, dans l'arc AB, en M″, où la tangente est T″t″. De pareils points sont appelés *points d'inflexion*, à cause du changement de sens [dû au changement de signe de $f''(x)$] qu'y éprouve la concavité, partout opposée à une tangente contiguë et, par conséquent, dirigée en sens contraires pour les deux arcs M″I, M″i adjacents respectivement aux deux segments M″T″ et M″t'' de la tangente. On dit encore que la courbure y change de sens, pour exprimer le brusque déplacement qu'y éprouve le centre du cercle osculateur, évidemment situé partout du côté de la concavité et qui, par suite, lorsqu'on le construit successivement pour les divers points de la courbe en allant de I vers i, saute, à l'instant où l'on arrive en M″, d'une des deux régions du plan que sépare la courbe AB, à l'autre région.

Il arrive quelquefois aussi que la dérivée y'', n'étant pas continue, change de signe non en s'annulant, mais en devenant infinie. Alors encore il y a *inflexion*, c'est-à-dire renversement du sens de la concavité, avec croisement de la courbe par sa tangente; mais le contact de ces deux lignes n'est évidemment plus du second ordre; et, par suite de la rapidité de rotation de la tangente d'un point au point suivant (rapidité en rapport avec la dérivée y'' de la pente y'), le rayon du cercle osculateur s'annule, de sorte que son centre passe avec continuité d'un côté de la courbe à l'autre.

Abstraction faite d'une circonstance aussi exceptionnelle et des cas également rares où la dérivée y'' s'annulerait sans changer de signe, les points d'inflexion ne diffèrent donc pas de ceux où la tangente, qu'on peut prendre pour un cercle de rayon infini, présente, comme le cercle osculateur, un contact du second ordre au moins avec la courbe, c'est-à-dire trois points communs infiniment voisins ou mêmes valeurs respectives de y, y', y'', et devient, en conséquence, cercle osculateur en même temps que droite osculatrice. Ce sont, en d'autres termes, les points où le rayon du cercle osculateur est infini.

Du reste, on le conçoit de suite en observant que l'équation $y''=0$, écrite $dy'=0$, exprime, à des infiniment petits du second ordre près, l'égalité de la pente (que définit y') aux deux bouts d'un arc élémentaire ds, ou l'évanouissement des changements de direction de la tangente sur cette longueur; ce qui n'a évidemment pas lieu dans un cercle tant que son rayon est fini.

117*. — Lieu des points d'inflexion d'une famille de courbes.

(Compléments, p. 154*.)

118*. — Des singularités les plus fréquentes dans les courbes planes : points isolés; points doubles.

(Compléments, p. 155*.)

119*. — Suite : Points de rebroussement.

(Compléments, p. 159*.)

Il nous suffira ici de savoir qu'une courbe change parfois brusquement de direction, et que le point où cela arrive est dit ***de rebroussement*** quand le changement égale deux angles droits, ***anguleux*** quand le changement diffère de deux droits ou ne constitue pas un simple renversement de la direction actuelle de la tangente.

120*. — De quelques autres singularités, beaucoup plus rares : points multiples en général; lignes singulières; points anguleux et points d'arrêt.

(Compléments, p. 162*.)

121*. — Application aux courbes algébriques : absence de points anguleux et de points d'arrêt dans ces courbes.

(Compléments, p. 166*.)

122*. — Exemples de points singuliers dans des courbes algébriques.

(Compléments, p. 168*.)

123*. — Exemples de points anguleux et de points d'arrêt, dans des courbes transcendantes limites de courbes algébriques.

(Compléments, p. 170*.)

124*. — Propriété des asymptotes des courbes algébriques, corrélative de celle qu'ont ces courbes de ne pouvoir présenter de points d'arrêt. Discontinuités possibles dans les fonctions algébriques.

(Compléments, p. 172*.)

TREIZIÈME LEÇON.

DU CERCLE OSCULATEUR, DE LA COURBURE ET DE LA DÉVELOPPÉE DES COURBES PLANES.

123. — Étude générale du cercle osculateur à une courbe plane.

Nous n'avons, dans la sixième Leçon ([1]), considéré le cercle osculateur à une courbe plane qu'en vue d'interpréter géométriquement la dérivée seconde de la fonction $y = f(x)$ représentée par la courbe. Il nous reste à l'étudier ici comme étant, après la tangente, le cas particulier le plus important des lignes osculatrices. Appelons x, y ses coordonnées courantes par rapport à un système d'axes *rectangulaires*, x_1, y_1 les coordonnées de son centre, R son rayon. Son équation sera

$$(1) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2.$$

Différentions-la deux fois en prenant l'abscisse x comme variable indépendante. Si nous supprimons des résultats un facteur commun 2 et si nous observons, à la seconde différentiation, que, dans le terme $(y - y_1)y'$, fourni par la première, les deux facteurs $y - y_1$, y' ont respectivement comme dérivées y', y'', nous aurons, pour calculer ces deux premières dérivées de y dans le cercle :

$$(2) \qquad x - x_1 + (y - y_1)y' = 0, \qquad 1 + y'^2 + (y - y_1)y'' = 0.$$

Or observons que, pour une abscisse désignée x, on nous donne, par hypothèse, l'ordonnée y, identique à celle, $f(x)$, de la courbe, et autant des dérivées successives y', y'', ... que nous pourrons en prendre d'égales respectivement à $f'(x)$, $f''(x)$, ...; de sorte que les seules quantités inconnues ou disponibles entrant dans les trois équations (1) et (2) sont alors les paramètres en même nombre x_1, y_1, R qui définissent le cercle. La dernière (2) fait connaître $y - y_1$ et, par suite, y_1; puis la substitution de cette valeur de $y - y_1$ dans la première (2) donne de même $x - x_1$ ou x_1, et les expressions trouvées ainsi

([1]) Et seulement au fascicule II, p. 65*.

pour $x - x_1$ et $y - y_1$ changent enfin l'équation (1), par l'extraction d'une racine carrée où nous pourrons, comme dans la sixième Leçon (p. 66*), attribuer au rayon R le signe de y'', en celle-ci :

$$(3) \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Nous retrouvons de la sorte une expression du rayon R d'accord avec celle, (25), de son inverse, obtenue par une tout autre voie dans la sixième Leçon (p. 70*).

La relation (3), simple combinaison de (1) et (2), est vérifiée en tous les points du cercle quand y' et y'' reçoivent leurs valeurs relatives à cette courbe et variables avec x : c'est, en d'autres termes, l'équation différentielle du second ordre commune à tous les cercles de même rayon. Il s'ensuit que, dans ceux-ci, les valeurs des dérivées suivantes y''', y^{iv}, ... s'obtiendront, à volonté, soit en différentiant la seconde équation (2), soit en différentiant la relation (3), c'est-à-dire en égalant à zéro les dérivées successives de l'expression (3) de R. Ainsi, les équations d'où se déduiraient ces dérivées y''', y^{iv}, ... dans le cercle peuvent s'écrire

$$(4) \qquad \frac{dR}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2R}{dx^2} = 0, \qquad \cdots$$

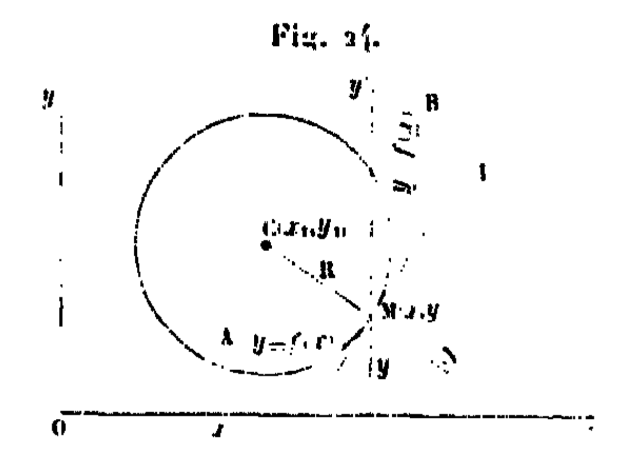
Or, après avoir déterminé, comme nous l'avons fait, le centre (x_1, y_1) et le rayon R du cercle osculateur en (x, y) à la courbe $y = f(x)$, il reste à chercher comment nous connaîtrons, dans chaque cas, l'ordre précis du contact du cercle avec la courbe, ou quelle sera, par conséquent, la première des dérivées de y, à partir de y''', différente dans ces deux lignes au point proposé (x, y). En général, ce sera la dérivée troisième y''', puisque aucune disposition n'a pu être prise pour lui faire acquérir dans le cercle la valeur $f'''(x)$ qu'elle a dans la courbe. Mais, s'il existe, le long de celle-ci, quelques points (x, y) où la dérivée $f'''(x)$ convienne également au cercle, on en sera évidemment averti par ce fait, que, dans la première (4), le premier membre, qui est une certaine expression en y', y'' et y''', se trouvera nul dans la courbe comme il l'est dans le cercle. Autrement dit, l'expression de R en fonction de x, calculée dans la courbe par la formule (3), aura, en ces points exceptionnels, sa dérivée première nulle. Et, aux mêmes points (x, y), les dérivées quatrièmes y^{iv} seront encore égales dans le cercle et dans la courbe, à la condition nécessaire et suffisante que la seconde relation (4) y soit vérifiée dans la courbe. Il en serait évidemment de même pour les dérivées suivantes.

Mais de pareilles concordances ne se produiront que dans des cas extrêmement rares; et l'on peut s'en tenir à la première relation (4), exprimant d'ordinaire, d'après le principe de Fermat, que R atteint une valeur maxima ou minima au point considéré. Donc, *en général, le contact d'une courbe avec son cercle osculateur est du second ordre le long de la courbe et du troisième aux points où le rayon de ce cercle devient soit plus grand, soit plus petit que dans tout le voisinage.*

Il suit de là que, sauf en ces points exceptionnels, le contact est d'ordre pair, et que le cercle y coupe la courbe, comme on le voit sur la figure ci-dessous. Or pour tout autre cercle ayant, en $M(x, y)$, même tangente MT que la courbe, le contact serait (vu la valeur différente de y'') seulement du premier ordre, ou non accompagné d'intersection. Ainsi, *l'on peut, en général, faire passer par un point donné d'une courbe un cercle et un seul qui, tout à la fois, l'y touche et l'y croise : c'est le cercle osculateur. Mais il cesse de croiser la courbe aux points où son rayon devient maximum ou minimum :* et il y a d'ailleurs avec elle un contact encore plus *long* qu'ailleurs, c'est-à-dire qu'il s'en tient rapproché beaucoup plus et, par conséquent, sur une plus grande étendue. Tout sommet de la courbe ou extrémité d'un axe de symétrie se trouve (sauf les cas de discontinuité) au nombre de ces points exceptionnels; car il est évident, d'une part, que le rayon R, prenant les mêmes valeurs de part et d'autre, y devient maximum ou minimum; d'autre part, que tout cercle y touchant la courbe y a le même axe de symétrie qu'elle et ne peut l'y croiser.

Pour construire le cercle osculateur au point quelconque $M(x, y)$ de la courbe proposée AB, il suffira d'y tirer d'abord la tangente

Fig. 24.



MT, qui sera également la sienne, et de porter, sur la *normale*, ou perpendiculaire correspondante MC, le rayon MC = R calculé par la formule (3), en le menant du côté qui fait avec la parallèle My' à l'axe des y positifs un angle aigu ou un angle obtus, suivant que la

concavité de la courbe et, par suite, du cercle, est tournée vers les y positifs ou vers les y négatifs, c'est-à-dire suivant que la dérivée y'' commune à la courbe et au cercle a le signe *plus* ou le signe *moins*. L'un ou l'autre cas sera, du reste, indiqué par le signe même attribué au rayon R, et qui est celui de y'' quand on convient, comme nous l'avons fait, de prendre positivement dans l'expression (3) de R le radical placé en numérateur. Le centre $C(x_1, y_1)$ étant trouvé, il ne restera plus qu'à décrire le cercle avec le rayon CM.

La valeur (3) de R se simplifie un peu en y introduisant la normale N à la courbe, tirée depuis le point $M(x, y)$ jusqu'à la rencontre de l'axe des abscisses x. Nous avons obtenu (p. 127), pour son expression, $= y\sqrt{1+y'^2}$; en sorte que le radical $\sqrt{1+y'^2}$ représentera le rapport de N à y, si l'on convient d'attribuer à la normale N même signe qu'à l'ordonnée y. Et la formule (3) deviendra

$$(5) \qquad R = \frac{N^3}{y^3 y''}.$$

126. — Détermination géométrique du centre de ce cercle.

Mais revenons au système des équations (2), qui, en y prenant pour x, y, y' et y'' les quantités de ces noms relatives au point donné $M(x, y)$ de la courbe $y = f(x)$, nous ont servi à déterminer le centre (x_1, y_1) du cercle; et cherchons à les interpréter géométriquement. Souvenons-nous que la seconde de ces équations (2), d'après la manière dont on l'a déduite par différentiation de la première, aura comme premier membre (à des infiniment petits près du second ordre), si on la multiplie par dx, l'accroissement même qu'éprouve le premier membre de la première (2) quand x, y et y' y grandissent respectivement de dx, $y'dx$ et $y''dx$, ou encore des différentielles dx, dy et dy' relatives au passage du point M de la courbe (figure ci-après) à un point M' infiniment voisin. Ainsi, la seconde équation (2), multipliée par dx et ajoutée à la première, donne, pour tenir lieu, dans le système, de la seconde (2) elle-même, une nouvelle équation, ne différant de la première (2) que par la substitution, aux coordonnées x, y de M et au coefficient angulaire correspondant y' de la tangente, des quantités analogues $x + dx$, $y + dy$, $y' + dy'$ relatives à M'. Donc le système (2) est l'équivalent des équations, de même forme toutes les deux,

$$(6) \quad x - x_1 + (y - y_1)y' = 0, \qquad x + dx - x_1 + (y + dy - y_1)(y' + dy') = 0,$$

prises à la limite, où les termes négligés de l'ordre de dx^2 sont sans influence par rapport à ceux de l'ordre de dx que l'on conserve.

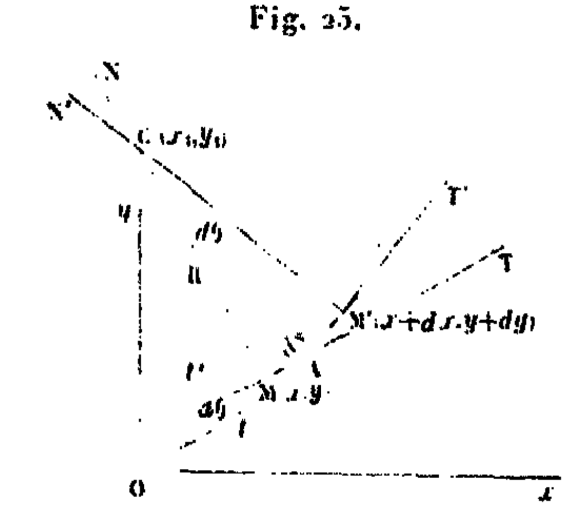
Or, en regardant les inconnues x_1, y_1 comme des coordonnées courantes, on reconnaît dans la première (6) l'équation classique de la normale menée à la courbe en M [1]. Ainsi cette équation exprime que le centre (x_1, y_1) du cercle osculateur appartient à la normale MN. Mais la seconde (6) est pareillement l'équation de la normale M'N' menée au point suivant M' de la courbe, où x, y, y' sont devenus $x+dx$, $y+dy$, $y'+dy'$; et cette équation signifie que le centre (x_1, y_1) appartient également à la seconde normale. Il est donc situé à leur intersection C, c'est-à-dire à la position limite du point où la normale MN est coupée par une normale voisine M'N' s'en approchant indéfiniment. Le système (2), auquel se réduit alors (6), montre justement que cette limite existe ou est déterminée.

Ainsi, *le centre du cercle osculateur se trouve à l'intersection des deux normales menées à la courbe, l'une au point d'osculation, l'autre en un point infiniment voisin.*

127. — De l'angle de contingence.

L'angle MCM' des deux normales infiniment voisines MN, M'N' s'appelle l'*angle de contingence* de l'arc intersecté MM' $= ds$. Nous

Fig. 25.



le représenterons par $d\theta$. Il vaut l'angle même TAT' des deux tan-

[1] C'est, du reste, ce qu'on voit de suite, en observant que la tangente et la normale menées à la courbe, au point (x, y), en même temps qu'une parallèle aux x positifs, et du côté de ceux-ci, font, de part et d'autre de cette parallèle, des angles aigus complémentaires; de sorte que leurs pentes, tangentes de ces angles et d'ailleurs de signes opposés, ont pour produit -1. La pente de la tangente étant y', celle, $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, de la normale vaudra donc le quotient de l'unité par $-y'$: égalité qui revient bien à la première relation (6).

gentes correspondantes MT, M'T', infiniment petit comme lui et qui, tenu d'être son égal ou son supplémentaire comme ayant ses côtés respectivement perpendiculaires aux siens, ne peut évidemment qu'être son égal. On le construit d'ordinaire en imaginant en un point fixe, à l'origine O par exemple, une droite mobile Ot, constamment parallèle à la direction MT prise à chaque instant par un certain point M décrivant la courbe. Cette droite occupe les deux positions Ot, Ot', parallèles à MT, M'T', quand le point mobile se trouve respectivement en M et en M'; et l'angle tOt' dont elle tourne d'une de ces positions à l'autre, évidemment égal à TAT', est l'angle de contingence. On voit qu'il mesure le changement éprouvé par la direction de la tangente ou de la courbe le long de l'arc correspondant ds.

Évaluons-le, soit par les normales, soit par les tangentes ou leurs parallèles Ot, Ot'.

Dans la première manière, le triangle MCM', formé par les deux normales et par la corde de l'arc infiniment petit ds, donne la proportion $\frac{\sin \mathrm{CM'M}}{\mathrm{CM}} = \frac{\sin \mathrm{MCM'}}{\mathrm{MM'}}$ ou, après substitution à chaque terme d'un autre ayant avec lui un rapport tendant vers l'unité,

$$(7) \qquad \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}.$$

Remplaçons-y R par sa valeur (3), ds par $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, expression revenant à $\sqrt{1 + y'^2}\,dx$, et nous aurons la formule cherchée

$$(8) \qquad d\theta = \frac{y''\,dx}{1 + y'^2}.$$

C'est bien ce que l'on trouve directement par la considération de l'angle xOt, dont $d\theta$ ou tOt' est la différentielle, $xOt' - xOt$, obtenue en passant du point M de la courbe au point suivant M', c'est-à-dire en faisant croître x de dx. Effectivement, cet angle xOt a pour tangente la pente y' de la droite mobile Ot parallèle à MT; de sorte qu'on a $xOt = \operatorname{arc\,tang} y'$ et, en se souvenant de la dérivée d'un arc tangente,

$$d.xOt \quad \text{ou} \quad d\theta = \frac{dy'}{1 + y'^2} = \frac{y''\,dx}{1 + y'^2}.$$

Observons qu'en portant dans la relation intuitive (7) l'expression (8) de $d\theta$, obtenue ainsi directement, et la valeur non moins simple, $\sqrt{1 + y'^2}\,dx$, de l'arc élémentaire ds, cette formule (7) aurait conduit très facilement à l'expression (3) du rayon du cercle osculateur.

128. — De la courbure d'une courbe plane.

Un arc est d'autant plus courbe, c'est-à-dire d'autant plus différent d'une droite, que sa direction change plus vite, ou que la tangente y tourne d'un angle de contingence $d\theta$ plus grand, sur une longueur infiniment petite ds prise la même quel que soit cet arc. Et comme, dans une courbe donnée, l'angle de contingence croît évidemment avec ds, il est naturel d'y mesurer la *courbure*, en un endroit quelconque, par ce qu'y serait l'angle de contingence, ou le changement de direction, *le long d'un arc égal à l'unité*, si, d'un point à l'autre d'un pareil arc, ce changement se faisait *aussi uniformément* qu'il tend à avoir lieu près de cet endroit le long d'un arc de plus en plus court, ou qu'il peut être censé se produire le long d'un arc contigu *infiniment petit ds*. En d'autres termes, il faudra, comme on dit, *rapporter* le changement $d\theta$ de la direction *à l'unité* de la longueur ds, et prendre pour *définition* de la *courbure* d'un arc élémentaire ds, ou de la courbe même au point (x, y) où il est situé, le rapport $\frac{d\theta}{ds}$ ainsi obtenu.

La formule (7) montre donc que la courbure sera mesurée par l'inverse du rayon R du cercle osculateur, et que l'on aura, vu l'expression (3) de R,

$$(9)\qquad \text{courbure} = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

comme on avait été conduit à l'admettre dès la sixième Leçon (p. 66*). On aurait pu prévoir ce résultat (9), en observant : 1°, d'une part, que la courbure de la courbe en un point donné (x, y) dépend de la manière dont la tangente y tourne, c'est-à-dire non seulement de la pente y', mais aussi de sa rapidité y'' de variation, et qu'elle est évidemment la même, comme ces deux quantités y', y'', dans la courbe et dans son cercle osculateur; 2°, d'autre part, que, dans le cercle osculateur où la normale et, par conséquent, la tangente tournent de quantités égales le long d'arcs égaux, la courbure est constante, ou exprimée par le rapport du changement total 2π de la direction après un tour complet à la circonférence décrite $2\pi R$: ce qui donne bien pour quotient l'inverse du rayon R.

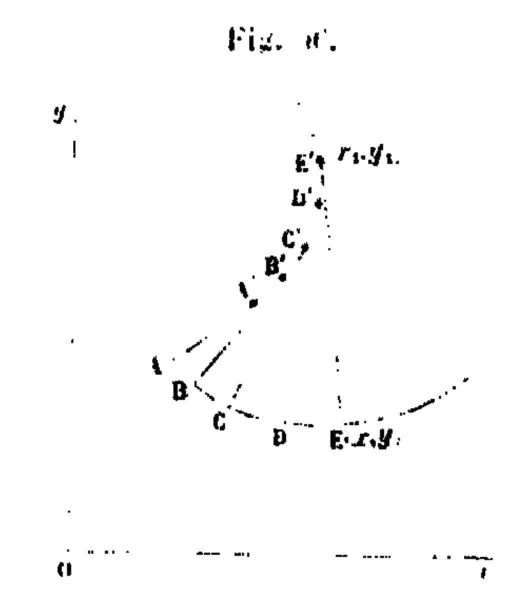
C'est parce que le cercle osculateur constitue, par sa figure même *uniformément courbe*, une représentation très expressive de la courbure d'une ligne au point où on le mène, qu'on le nomme aussi *cercle de courbure*, et que son centre et son rayon sont presque toujours

appelés *centre de courbure* et *rayon de courbure* de la ligne proposée.

129. — De la développée d'une courbe plane.

On appelle développée d'une ligne plane ABCDE ... le lieu de ses centres de courbure A', B', C', D', E', ..., ou, par conséquent, des

Fig. 46.



intersections successives de ses normales. C'est donc une seconde courbe A'B'C'....

Voyons d'abord comment on en formera l'équation. Celle de la courbe proposée étant, par exemple, $F(x, y) = 0$, et ayant fourni par deux différentiations les valeurs de y' et de y'' en fonction de x et de y, le point (x_1, y_1) de la développée, correspondant au point quelconque (x, y) de cette courbe, sera donné par les équations (2), qui, jointes à $F(x, y) = 0$, forment un système déterminant y, x_1 et y_1 en fonction de x. On pourra donc, supposé que l'on sache résoudre ce système par rapport à x_1 et y_1 après élimination de y, construire la développée par points, avec l'abscisse x de la première courbe pour variable *auxiliaire*. Mais le mieux, si l'on veut étudier à part la développée, sera d'éliminer x entre les deux relations, de la forme $x_1 = \varphi(x)$ et $y_1 = \psi(x)$, ainsi obtenues ou, plus simplement, d'éliminer x et y entre les trois relations du système, en tirant, par exemple, x et y des deux équations (2) en fonction de x_1 et de y_1, pour substituer leurs valeurs dans $F(x, y) = 0$. L'équation de la courbe proposée donnera ainsi la relation existant entre x_1 et y_1, c'est-à-dire l'équation de la développée.

Si l'équation $F(x, y) = 0$ est algébrique, les relations (2) le seront également et, par suite, la résultante de $F = 0$ et de (2) en x_1 et y_1 ne le sera pas moins, d'après la théorie de l'élimination entre équations

algébriques. Donc, *la développée d'une courbe algébrique est algébrique elle-même.*

Avant de passer à des exemples de ces éliminations, étudions d'une manière purement synthétique les belles propriétés générales de la développée d'une courbe, découvertes au XVIIᵉ siècle par Huygens.

130. — Propriétés générales des développées.

Elles découlent de deux principales, dont la première s'énonce ainsi : *Les normales de la courbe proposée sont tangentes à sa développée aux centres de courbure correspondants.*

Pour le démontrer, considérons non pas, tout de suite, la véritable développée, mais une ligne continue, c'est-à-dire sans point anguleux, joignant l'une à l'autre les intersections successives A′, B′, C′, D′.... de normales AA′, BB′A′, CC′B′, DD′C′, ... menées à la courbe en des points A, B, C, D, ... très voisins. Lorsque ceux-ci se rapprocheront indéfiniment, les normales se couperont, par raison de continuité, sous des angles de plus en plus petits, à proportion qu'elles le feront de plus en plus près les unes des autres; en sorte que la courbe A′B′C′... aura sa pente graduellement variable, même à la limite, le long de son arc et admettra, au moins jusqu'au premier ordre, dans ses rapports avec toute droite fixe qui la couperait en deux points de plus en plus voisins, la théorie ordinaire des contacts, donnée à la page 187. Cela posé, chaque intersection, B′ par exemple, se trouvera très proche du centre de courbure pour le point correspondant B de la courbe, centre qui serait sa position limite si la normale suivante CC′B′ s'approchait indéfiniment de BB′A′. Par conséquent, la développée est la limite de la courbe variable A′B′C′.... Or celle-ci possède deux points, tendant à se confondre, communs avec l'une quelconque des normales supposée fixe, BB′A′ par exemple, savoir A′ et B′, où se produisent les intersections de BB′A′ avec les deux normales précédente et suivante. Donc, puisque deux intersections pareilles deviennent finalement un contact du premier ordre (p. 187), la ligne limite, c'est-à-dire la développée, est bien tangente à BB′A′ au centre même du cercle osculateur pour le point B de la courbe proposée.

Fig. 27.



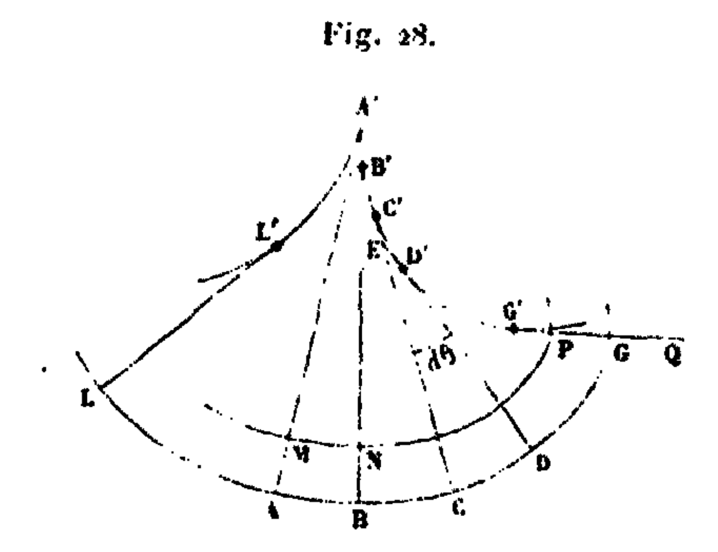
On voit par là que, si l'on prend, sur la courbe et sur sa dévelop-

pée, les deux arcs correspondants joignant les extrémités en regard de deux rayons de courbure, infiniment voisins, de la courbe proposée, l'angle de ces deux rayons, normaux à l'une des courbes et tangents à l'autre, sera indifféremment l'angle de contingence des deux arcs. Ainsi, deux arcs correspondants d'une courbe et de sa développée ont même angle de contingence.

La seconde propriété générale consiste en ce que *tout arc de développée susceptible d'être parcouru, d'un bout à l'autre, par un mobile allant vers la courbe proposée, c'est-à-dire dans la direction de ses rayons de courbure, a pour longueur l'excédent du premier de ces rayons, issu du point de départ, sur le dernier, issu du point d'arrivée.*

Par exemple, l'arc de développée A'G', qu'on peut supposer décrit, de A' en G', par un mobile dirigé sans cesse suivant le rayon de courbure, A'A, ou B'B, ou C'C, etc., de la courbe proposée AG,

Fig. 28.



égalera la diminution totale, A'A — G'G, éprouvée par ce rayon de courbure d'un bout de l'arc à l'autre bout. Il suffit évidemment, pour le démontrer, de prouver que l'un quelconque, C'D', des chemins infiniment petits parcourus ainsi successivement, a pour valeur la diminution correspondante, C'C — D'D, du rayon de courbure.

C'est ce qu'on voit en projetant, sur le premier, C'C, de ces rayons, la ligne mixtiligne C'D'DC, aboutissant aux mêmes extrémités, et formée du second rayon D'D, joint aux deux arcs correspondants, C'D', DC, qu'ils interceptent sur les deux courbes. La partie C'D' se projettera sous des angles inférieurs à celui, CED $= d\theta$, des deux rayons et, par conséquent, en vraie grandeur, à des infiniment petits près négligeables : autrement dit, C'D' aura avec sa projection sur C'C un rapport tendant vers 1, et pourra la remplacer. Quant à l'arc DC, il est évident

que, projeté sur sa normale C′C sous des angles presque droits, il donnera une projection ayant avec lui un rapport évanouissant, ou égale à une fraction infiniment petite soit de CD, soit même de l'arc correspondant C′D′ de développée. En effet, deux arcs correspondants finis et, par conséquent, comparables, des deux courbes, comme, par exemple, AG et A′G′, comprennent un même nombre indéfiniment croissant d'arcs élémentaires, tels que CD pour l'une et C′D′ pour l'autre. Donc, le rapport de CD à C′D′ est généralement de l'ordre de celui de AG à A′G′ et, par conséquent, fini. C'est bien dire que la projection de DC sur C′C sera négligeable devant celle de C′D′. Reste à évaluer la projection, D′D × cos CED ou D′D × cos $d\theta$, de la partie rectiligne et principale D′D de la ligne mixte. Remplaçons-y cos $d\theta$ par son expression très convergente en série $1 - \frac{d\theta^2}{1.2} + \ldots$, qui, vu la valeur infiniment approchée $\frac{ds}{R}$ ou $\frac{CD}{D'D}$ de l'angle de contingence $d\theta$, peut s'écrire $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{CD}{D'D}\right)^2 + \ldots$. Il viendra, pour la projection cherchée de D′D, avec une erreur incomparablement plus faible que le second terme écrit, la différence $D'D - \frac{CD}{2}\frac{CD}{D'D}$, ou $D'D - CD \times \frac{d\theta}{2}$. On voit qu'elle équivaut à D′D, sauf une partie infiniment petite de l'arc CD ou de l'arc comparable C′D′, partie encore négligeable vis-à-vis de C′D′. En somme donc, la projection C′C de la ligne mixtiligne C′D′DC est réductible à C′D′ + D′D, ou la différence C′C − D′D réductible à C′D′; et le rapport limite de l'arc parcouru C′D′ à la diminution simultanée C′C − D′D du rayon de courbure vaut bien l'unité.

En appelant R_0 le premier rayon de courbure, R un autre quelconque de ces rayons, issu du point (x_1, y_1) de la développée, enfin s_1 l'arc intercepté de celle-ci, on pourra donc joindre au système des quatre équations (1), (2) et $F(x, y) = 0$, la cinquième relation $s_1 = R_0 - R$; et l'élimination, par exemple, de x, y, y_1, R entre ces cinq équations, toujours effectuable algébriquement si $F(x, y)$ est un polynôme, donnera entre s_1 et x_1 une relation de la forme $\varphi(x_1, s_1) = 0$, où φ sera un nouveau polynôme quand $F(x, y)$ en sera un. Donc, *lorsqu'une courbe est la développée d'une autre algébrique, son arc égale une fonction algébrique de ses coordonnées*. Aussi la qualifie-t-on de *rectifiable*, pour signifier que sa longueur s'exprime, tout au moins implicitement, sous forme finie.

D'après la démonstration précédente, tant que l'arc décrit sur la développée ne présentera pas de changement brusque de direction, le

rayon R de la courbe proposée ira sans cesse en diminuant, si le mobile marche, comme nous l'avons admis, vers cette courbe, ou en augmentant, si le mouvement se faisait dans le sens inverse, c'est-à-dire de G' vers A'. Donc, étant supposé que les deux courbes se prolongent sans interruption, le rayon de courbure ne pourra devenir minimum ou maximum qu'à la faveur d'un point soit anguleux, soit de rebroussement, de la développée, comme on le voit par le point A' de la figure précédente, où la développée G'A' se continue vers L' en changeant brusquement de direction, tandis que la courbe GA se prolonge vers L. Or les deux rayons de courbure de la courbe proposée tangents en un point anguleux de la développée comprendraient évidemment entre eux une infinité d'autres rayons issus de ce même point, puisque la courbe proposée est supposée ininterrompue; et ces rayons, n'interceptant qu'un arc total de développée nul, seraient égaux entre eux, de sorte que la courbe donnée s'y réduirait à un arc de cercle décrit autour du point anguleux comme centre. Par suite, le rayon ne s'y trouverait pas précisément maximum ou minimum, mais constant. Il suit donc de là que *la développée d'une courbe présente un rebroussement au point de départ de chacun des rayons de courbure maxima ou minima de celle-ci.*

La courbure propre de la développée est infinie en de tels points; car, pour un angle commun de contingence $d\theta$ des deux courbes qui sera du premier ordre de petitesse, le rayon de courbure actuellement maximum ou minimum ne variera, d'après le principe de Fermat, que d'une quantité d'ordre supérieur, et, celle-ci égalant justement l'arc correspondant ds_1 de développée, si on la prend, conformément à la définition de la courbure, pour diviseur de $d\theta$, il viendra bien un quotient infini.

131. — Description d'une courbe par le déroulement de sa développée.

La deuxième propriété générale, qui fait du rayon de courbure A'A (p. 204) ou, du moins, de son excédent sur G'G, *une sorte de développement* de la ligne A'G', est précisément celle qui justifie le nom de *développée* donné à cette ligne. Jointe à la première propriété, elle conduit à un mode curieux de description de la courbe proposée AG au moyen d'un fil tendu.

Imaginons qu'on ait découpé le bord d'un corps plat d'après la forme même de la développée, et qu'on ait appliqué ce corps sur le plan de la figure précédente, de manière qu'il se termine suivant l'arc L'A'G' et laisse libre l'espace compris entre cet arc et la courbe

proposée LAG. Concevons qu'un fil flexible et inextensible A'G'G soit fixé en A', puis, s'appuyant sur le corps, suive la développée jusqu'en G' et se continue enfin, tangentiellement à celle-ci, jusqu'à son extrémité libre G, supposée munie d'un crayon. Cela posé, si l'on tient le fil tendu et qu'on fasse mouvoir le crayon de G vers A, il est clair qu'une partie de plus en plus grande du fil se déroulera et que, à chaque instant, la partie non enroulée sera, par sa tension, maintenue tangente à A'G' ou, par suite, normale à AG. Or cette seconde partie, qui aura grandi de tout l'arc de développée ainsi déroulé, de G'C' par exemple, restera constamment, d'après la deuxième propriété, égale en longueur au rayon de courbure de AG qui aura sa direction, c'est-à-dire à C'C quand la partie déroulée sera G'C'; et, par conséquent, l'extrémité mobile du fil, alors en C, ne quittera pas la courbe. C'est dire que le crayon tracera celle-ci, GA, d'une manière continue, comme il tracerait une circonférence si la développée se réduisait à un point. Au delà de A, le fil, devenu A'A, s'enroulera sur la deuxième branche A'L' de la développée, et le crayon continuera à tracer la courbe de A en L, etc.

Il reviendrait évidemment au même d'avoir, au lieu d'un fil, une règle constamment tangente au corps figurant la développée, et qui roulerait sur ce corps sans glisser, c'est-à-dire de manière que sa partie comprise d'un même côté du point de contact variât continuellement d'une quantité égale à l'arc de développée touché par elle. Un crayon attaché à l'extrémité de cette règle, et qui se serait trouvé d'abord en G, tracerait sur le plan la courbe GA.

132. — Des développantes d'une courbe.

Mais, si l'extrémité mobile G du fil ou de la règle décrit la courbe GA pendant que la développée se déroule ou que la règle roule sur elle, quelles courbes les autres points de ce fil ou de cette règle, P par exemple, décriront-ils?

Pour le voir, imaginons qu'on mène de proche en proche, à partir du point P (p. 204), une ligne, P...NM, coupant à angle droit toutes les normales de la courbe GA. Cette ligne aura donc pour normales celles de la proposée et, donnant lieu aux mêmes intersections successives de ces normales, n'aura pas d'autres centres de courbure qu'elle, ni d'autre développée que la sienne G'A'L'. Et il suffira de concevoir la règle ou le fil terminés d'abord en P, pour que leur roulement ou déroulement fasse tracer à l'extrémité mobile, devenue P, la courbe P...NM. En conséquence, *tous les points du fil ou de son prolon-*

gement GQ, et tous ceux de la règle, qu'on peut se représenter comme indéfinie dans les deux sens, décrivent des courbes ayant normales communes, mêmes centres de courbure et même développée. Ces courbes, dont les éléments correspondants sont parallèles (comme perpendiculaires à une même position du fil ou de la règle), constituent ce qu'on appelle une *famille de lignes parallèles*, du moins quand on les prend toutes d'un même côté de la développée; et alors la plus courte distance d'un point quelconque de l'une d'elles à une autre voisine est évidemment mesurée par la partie invariable du fil ou de la règle qu'elles interceptent. Dans le cas contraire, elles mériteraient plutôt le nom de *lignes anti-parallèles*, leurs parties correspondantes étant disposées symétriquement de part et d'autre de la développée et, par conséquent, suivant un *ordre croisé* ou inverse. Dans les deux cas, toutes ces lignes sont dites les *développantes* de leur développée commune.

Ainsi, l'on appelle *développante* d'une courbe la ligne décrite par tout point d'une droite roulant sur cette courbe, ou par tout point d'un fil d'abord enroulé plus ou moins sur elle et qui se déplie.

Observons qu'un mouvement infiniment petit du fil, de C′C à B′B par exemple, peut être assimilé à une rotation de la partie droite C′C de ce fil autour de son point de contact actuel ou correspondant C′ avec la développée. Cela résulte de ce que, C′ étant le centre des cercles osculateurs menés à toutes les développantes en leurs points situés sur C′C, les circonférences décrites par les divers points de la droite C′C, dans une rotation autour de C′, ont un contact du second ordre avec les courbes GA, PM, ... et ne s'éloignent de celles-ci, entre les deux positions voisines C′C, B′B du fil, qu'à des distances du troisième ordre de petitesse seulement.

QUATORZIÈME LEÇON.

SUITE : COURBURE ET DÉVELOPPÉE DES SECTIONS CONIQUES. * THÉORIE DES COURBES ENVELOPPES.

---

133. — Rayon de courbure des sections coniques.

Voyons à quels résultats conduisent les théories de la dernière Leçon dans le cas des courbes du second degré. Nous aurons d'abord à calculer, par la formule (5) [p. 198] où la normale N a l'expression $y\sqrt{1+y'^2}$, le rayon R du cercle osculateur à ces courbes.

Prenons leur équation sous la forme générale qu'elle admet quand on les rapporte à leur axe focal pour axe des x et à la tangente à un sommet pour axe des y, les x positifs étant supposés tournés vers la branche de courbe dont ce sommet fait partie. On aura, comme on sait,

$$(10) \qquad y^2 = 2px - (1-e^2)x^2,$$

les constantes positives p et e étant respectivement le *demi-paramètre*, $\frac{b^2}{a}$, quotient du demi-axe non focal b par le demi-axe focal a, et l'*excentricité*, rapport à ce demi-axe focal a de la demi-distance focale $\sqrt{a^2 \mp b^2}$, inférieur à l'unité dans l'ellipse, supérieur à l'unité dans l'hyperbole, enfin égal à 1 dans le cas limite intermédiaire de la parabole, où a devient infini et b comparable seulement à $\sqrt{a}$.

Différentiée deux fois, cette équation (10) donne, en divisant par 2,

$$(11) \qquad yy' = p - (1-e^2)x, \qquad y'^2 + yy'' = e^2 - 1.$$

La première de celles-ci, élevée au carré, montre que $y^2y'^2$ a pour valeur $p^2 - (1-e^2)[2px - (1-e^2)x^2]$ ou, d'après (10), $p^2 - (1-e^2)y^2$. Le carré de la sous-normale yy' et la normale N ou $\pm\sqrt{y^2+y^2y'^2}$ seront donc

$$(12) \qquad y^2y'^2 = p^2 - (1-e^2)y^2, \qquad N = \pm p\sqrt{1+\frac{e^2y^2}{p^2}},$$

expressions un peu plus simples que celles qu'on aurait en n'y introduisant pas l'ordonnée y à la place de l'abscisse x.

Le numérateur de l'expression (5) de R est ainsi connu. Quant au dénominateur y^2y'', la dernière (11), multipliée par y^2, le donne de suite, en y isolant ce terme y^3y'' et remplaçant $y^2y'^2$ par sa valeur (12). Il vient

$$(13) \qquad y^3y'' = -p^2;$$

et les valeurs (13), (12) de y^3y'' et de N changent enfin la formule générale (5) en celle-ci

$$(14) \qquad R = -\frac{N^3}{p^2} = -p\left(1 - \frac{e^2y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Donc, abstraction faite du signe qui est contraire à celui de l'ordonnée y, *le rayon de courbure d'une section conique égale le quotient du cube de la normale par le carré du demi-paramètre.* C'est dire qu'il varie, d'un point à l'autre, proportionnellement au cube de la normale, laquelle grandit elle-même avec la valeur absolue de l'ordonnée y, c'est-à-dire avec la distance $\pm y$ à l'axe focal. Il a donc sa valeur minimum, exprimée simplement par p ou $\frac{b^2}{a}$, aux extrémités de l'axe focal, pour $y = 0$; et il n'atteint, comme y^2, un maximum que dans l'ellipse, pour $y^2 = b^2$, c'est-à-dire aux extrémités du petit axe. Ce rayon de courbure maximum, vu la valeur correspondante $\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\frac{a^2}{b^2}$ de $e^2\frac{y^2}{p^2}$, est $p\frac{a^3}{b^3}$ ou $\frac{a^2}{b}$. Ainsi, *à tout sommet d'une conique, le rayon de courbure égale le quotient, par le demi-axe qui s'y termine, du carré d'un demi-axe perpendiculaire.*

134*. — Son expression en fonction d'un angle définissant sa direction même; et conséquences diverses dans le cas d'une ellipse peu aplatie.

(Compléments, p. 175*).

135. — Développée de la parabole; rectification de la seconde parabole cubique.

Passons à l'étude de la développée des sections coniques; et commençons par la parabole, où l'hypothèse $e = 1$ réduit l'équation (10) de la courbe à $y^2 = 2px$.

Remplaçons, dans les relations (2) [p. 195], le facteur y', la somme $y'^2 + yy''$ et ensuite le facteur y'', qui y figurent aux premiers membres, par leurs valeurs respectives $\frac{p}{y}$, 0, $-\frac{p^2}{y^3}$ résultant de (11) et de

(13); ces équations (2) seront

$$(17)\qquad x - x_1 - p - \frac{p y_1}{y} = 0, \qquad 1 - \frac{p^2 y_1}{y^3} = 0.$$

En substituant dans la première la valeur de y_1 que donne la seconde, et puis remplaçant un facteur y^2, qui figure alors dans un terme de cette première formule (17), par sa valeur $2px$ déduite de l'équation de la courbe, ces deux relations, résolues finalement par rapport à x et à y^3, deviennent

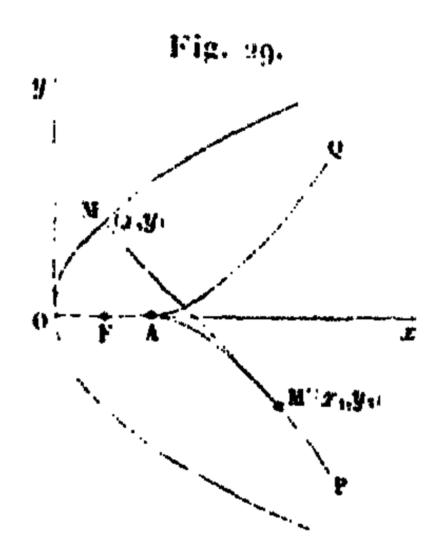
$$(18)\qquad x = \frac{x_1 - p}{3}, \qquad y^3 = -p^2 y_1.$$

Conformément à une indication du n° **129** (p. 202), il n'y a plus, pour avoir l'équation de la développée, qu'à porter ces valeurs de x et de y^3 dans celle de la parabole, écrite non $y^2 = 2px$, mais, par une élévation au cube ne modifiant nullement une équation entre variables réelles, $(y^3)^2 = 8p^3x^3$. Il vient ainsi, après division par p^4,

$$(19)\qquad y_1^2 = \frac{8}{27p}(x_1 - p)^3.$$

On reconnaît l'équation d'une seconde parabole cubique PAQ (¹), qui a, naturellement, comme axe de symétrie, l'axe des x ou de la parabole même OM, avec son point de rebroussement A à l'extrémité $x_1 = p$ du rayon de courbure minimum OA ou p, et qui, à partir de ce point A ainsi situé à une distance du sommet O double de celle du foyer F de la parabole, s'étend jusqu'à l'infini. Pour avoir le centre de courbure correspondant à un point quelconque, M(x, y) par exemple, de la parabole, il suffit de mener à celle-ci la normale MM′, jusqu'au contact, en M′, de la branche opposée AP de la développée : M′ est le centre demandé.

Fig. 29.



(¹) Il n'a été question de cette courbe, dont l'ordonnée abaissée sur son axe a son carré proportionnel au cube de l'abscisse comptée à partir de son sommet A, que dans le fascicule II, p. 170*. Mais on reconnaît facilement que sa forme est celle de PAQ, que ses deux branches symétriques AQ, AP ont leur tangente d'abord couchée, en A, sur l'axe Ax, puis, à mesure qu'on s'éloigne de A, inclinée sur cet axe d'un angle de plus en plus grand, et que, par conséquent, la direction de la courbe, censée décrite de P en A et de A en Q, change brusquement de deux droits au point A, appelé, pour cette raison, ***point de rebroussement***.

D'après la deuxième propriété générale des développées, l'arc AM' de la seconde parabole cubique PAQ, compté depuis le point de rebroussement A jusqu'à un point quelconque $M'(x_1, y_1)$, égale la différence, $M'M - AO$ ou $\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} - p$, des deux rayons de courbure correspondants de *sa parabole développante* OM; et les formules (18), (19) donnent aisément cette différence en fonction algébrique explicite de x_1. Donc *la seconde parabole cubique est une courbe rectifiable.*

136. — Développées de l'ellipse et de l'hyperbole.

Dans les cas de l'ellipse et de l'hyperbole, la développée, toujours douée évidemment des mêmes genres de symétrie que sa courbe, admet un centre comme ces coniques, et il y a tout avantage à y transporter l'origine. On sait que ce changement donne, pour l'équation de la courbe,

$$(20) \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mais, comme il consiste simplement à remplacer l'ancien x par $x \pm a$, ou à ne modifier l'abscisse que d'une constante, rien, en un point quelconque de la courbe, ne sera changé pour cela ni à l'ordonnée y, ni à la pente y', ni à sa rapidité de variation y''; et les formules précédentes où x n'entre pas subsisteront intégralement. On pourra donc, d'après la deuxième (11) et d'après (13), remplacer, dans la seconde équation (2), $y'^2 + yy''$ par $e^2 - 1$ et y'' par $-\frac{p^2}{y^3}$. Cette seconde équation (2), chargée de définir l'ordonnée y_1 du centre de courbure, devient alors, si on la résout par rapport à y^3 et que, se bornant d'abord au cas de l'ellipse, on substitue finalement à e^2 et à p leurs valeurs $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ et $\frac{b^2}{a}$,

$$(21) \qquad y^3 = -\frac{p^2 y_1}{e^2} = \frac{b^4 y_1}{b^2 - a^2}.$$

Or la symétrie de l'équation (20) de la courbe en x et y, a et b, quand on y attribue ainsi au second terme le signe supérieur $+$, rend évident ce fait que, si l'on avait adopté l'axe des x pour axe des y et *vice versa*, ce qui est présentement l'abscisse x_1 d'un centre de courbure et l'abscisse x du point correspondant de l'ellipse aurait figuré dans l'équation (21) sous les noms de y et y_1, avec permutation de a et b.

Donc, au lieu de prendre la peine de calculer x_1 par la première

équation (2), on peut, de (21), tirer immédiatement

$$(22) \qquad x^3 = \frac{a^4 x_1}{a^2 - b^2}.$$

Telles sont les deux formules qui tiendront lieu des précédentes (17) du cas de la parabole. Pour simplifier, posons

$$(23) \qquad \mathrm{A} = \frac{a^2 - b^2}{a}, \qquad \mathrm{B} = \frac{a^2 - b^2}{b},$$

et il viendra, en extrayant les racines cubiques des membres respectifs de (22) et de (21), puis divisant par a ou par b :

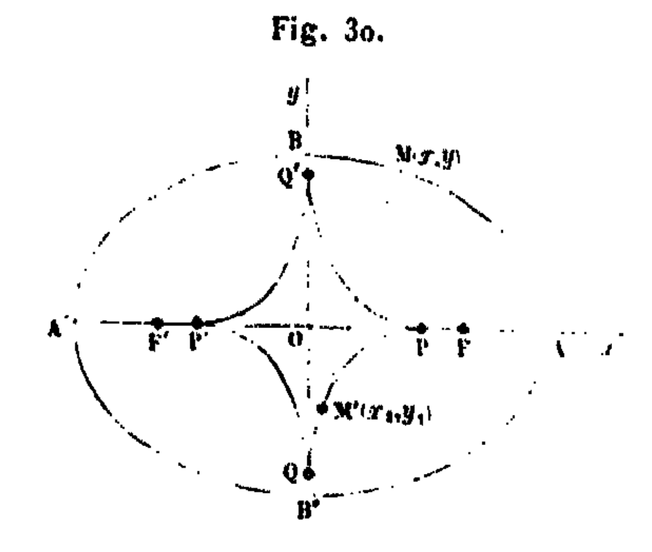
$$(24) \qquad \frac{x}{a} = \left(\frac{x_1}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \frac{y}{b} = -\left(\frac{y_1}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ces valeurs de $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, portées dans l'équation (20) où le second terme reçoit ici le signe +, donneront donc, comme équation de la développée de l'ellipse,

$$(25) \qquad \left(\frac{x_1}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_1}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Cette courbe a la forme PQP'Q'P, avec quatre points de rebroussement aux extrémités P, Q, P', Q' des rayons de courbure minima et maxima AP, BQ, A'P', B'Q'. Pour une demi-distance focale $\sqrt{a^2 - b^2} = ae$ constante, ses demi-axes OP ou OP' = A et OQ ou

Fig. 30.



OQ' = B sont, d'après leurs valeurs (23), en raison inverse des demi-axes correspondants a, b de l'ellipse. Le premier, OP ou A, évidemment égal à ae^2, est plus petit que la demi-distance focale OF $= ae$; et, par conséquent, les sommets P, P' se trouvent toujours dans l'ellipse,

entre les deux foyers F, F'. Mais le second, OQ ou B, a son rapport à b exprimé par $\frac{a^2}{b^2} - 1$, nombre au-dessous ou au-dessus de l'unité suivant que le rapport du grand axe $2a$ de l'ellipse au petit $2b$ n'atteint pas ou dépasse $\sqrt{2}$: les sommets Q et Q' sont intérieurs à l'ellipse dans le premier cas, extérieurs dans le second. Quand le rapport des deux axes a précisément la valeur intermédiaire $\sqrt{2}$, ou que la distance focale FF' égale le petit axe BB', Q coïncide avec B', Q' avec B, et P, P' sont au milieu des droites OA, OA', vu que la première formule (23) donne alors $A = \frac{1}{2}a$: les rayons de courbure minima égalent donc la moitié du demi-grand axe et les rayons de courbure maxima le double du demi-petit axe.

Quel que soit le rapport de a à b, les formules (24) montrent que x_1 et x ont même signe, y_1 et y, signes contraires. Donc le centre de courbure, pour un point quelconque $M(x, y)$ de l'ellipse, s'obtiendra en menant une normale MM' jusqu'à son contact, en M', après la traversée de l'axe focal, avec l'arc PQ de développée situé du même côté du petit axe que le point proposé M.

Quand l'ellipse se rapproche du cercle, ou que l'excentricité e tend vers zéro, le rapport de B à A tend vers l'unité, et l'équation (25) de la développée, multipliée par $A^{\frac{2}{3}}$, devient à la limite $x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}}$: cette courbe acquiert donc deux nouveaux axes de symétrie, bissecteurs des angles des axes coordonnés, car x_1 et y_1 y entrent symétriquement. Mais, à moins que l'ellipse ne devienne infinie et ne garde entre ses deux axes une différence $2(a-b)$ finie, à laquelle correspondra une demi-distance focale $\sqrt{a^2-b^2}$ ou $\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}$ infiniment croissante, cette développée se rapetissera indéfiniment ou se ramassera, en quelque sorte, autour du centre O. En effet, son demi-axe $A = ae^2$ exprimera environ la différence $2(a-b) = 2a(1-\sqrt{1-e^2})$ des deux axes de l'ellipse, comme le montre le développement de

$$\sqrt{1-e^2} = (1-e^2)^{\frac{1}{2}}$$

par la formule du binôme, avec suppression des termes en e^4 et au-dessus. Ainsi, la développée du cercle se réduit à son centre; ce qui était évident.

Au sujet de la développée de l'hyperbole, je me contenterai d'observer que, l'équation de cette conique s'obtenant par le simple changement de b^2 en $-b^2$ dans celle de l'ellipse, les calculs à effectuer seront la simple répétition des précédents; car le changement de b^2 en $-b^2$ ne modifiera rien aux raisonnements, b n'ayant figuré que

par son carré dans les formules essentielles (21), (22) et (25). Celle-ci, qui, d'après les expressions (23) de A et B, est, au fond,

$$\left[\frac{x_1^2}{\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2}}\right]^{\frac{1}{3}} - \left[\frac{y_1^2}{\frac{(a^2+b^2)^2}{b^2}}\right]^{\frac{1}{3}} = 1.$$

donnera donc, comme équation de la développée de l'hyperbole,

(26) $$\left(\frac{x_1}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y_1}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

en posant

(27) $$A = \frac{a^2+b^2}{a}, \qquad B = \frac{a^2+b^2}{b}.$$

Cette courbe rappelle par sa forme générale, dans chacune de ses deux parties bien distinctes situées respectivement des deux côtés de l'axe non transverse, la développée de la parabole, que nous avons étudiée en détail.

137*. — De l'enveloppe d'une famille de courbes planes et, généralement, de la ligne sur laquelle ces diverses courbes sont rapprochées de leurs voisines infiniment plus qu'en leurs autres points.

(Compléments, p. 178*).

Je me contenterai de dire ici que, pareillement à la famille des normales à une courbe, dont les intersections successives déterminent une nouvelle courbe, la *développée*, tangente à toutes ces normales et séparant la partie du plan qui les contient de celle où, ordinairement, elles ne pénètrent pas, de même, une famille donnée de droites ou de courbes constitue souvent une série de lignes qui se coupent successivement, de manière à former, comme lieu des points de concours de chacune avec la suivante, une courbe tangente à toutes et limitant ou *enveloppant* l'espace qui les contient : aussi appelle-t-on cette courbe l'*enveloppe* de la famille donnée de lignes, tandis que celles-ci prennent le nom d'*enveloppées*.

138*. — Propriétés communes de ces sortes de lignes.

(Compléments, p. 181*.)

139*. — Propriété distinctive des courbes enveloppes.

(Compléments, p. 183*.)

140*. — Exemples.

(Compléments, p. 185*.)

141*. — Enveloppes intérieures, limitant, dans le champ couvert par une famille de courbes, les régions qui en sont plus ou moins sillonnées.

(Compléments, p. 186*.)

142*. — Courbes asymptotes et enveloppes asymptotes d'une famille.

(Compléments, p. 191*.)

143*. — Exemples.

(Compléments, p. 193*.)

QUINZIÈME LEÇON.

DES ROULETTES ET DE LA CYCLOIDE. * COURBES PLANES EN COORDONNÉES POLAIRES; * DE LA SPIRALE LOGARITHMIQUE.

144. — Des roulettes : théorème de Descartes au sujet de leurs normales.

Parmi les courbes planes que découvrirent les géomètres du XVII[e] siècle, et dont l'étude à cette époque fit beaucoup avancer la Science, deux surtout, la *cycloïde* et la *spirale logarithmique*, présentent un intérêt exceptionnel. Aussi leur consacrerai-je presque en entier cette dernière Leçon sur les courbes planes, en commençant par la cycloïde, la plus remarquable des deux tant à cause des progrès dont elle a été l'occasion ou comme l'instrument en Analyse infinitésimale, que par d'importantes applications mécaniques. Elle est comprise dans une classe de courbes qu'on appelle les *roulettes* et dont il y a lieu de dire d'abord quelques mots.

Supposons qu'un point M (figure ci-après) soit lié invariablement (au moyen de deux tiges droites MC et MD, par exemple) à une courbe *mobile* CD, et que celle-ci *roule* sur une courbe fixe AB, c'est-à-dire se meuve contre elle en lui étant toujours tangente et de manière que des arcs de même longueur, sur les deux courbes, viennent successivement coïncider élément par élément : la courbe MP décrite dans ces conditions par le point M sera justement ce qu'on appelle une *roulette*. Par exemple, toute courbe plane est, d'après ce qu'on a vu (p. 207), la roulette décrite par le pied d'une de ses normales roulant sur sa développée; en sorte que les roulettes peuvent être regardées comme une généralisation des développantes, tout comme les courbes enveloppes (¹) en sont une des développées.

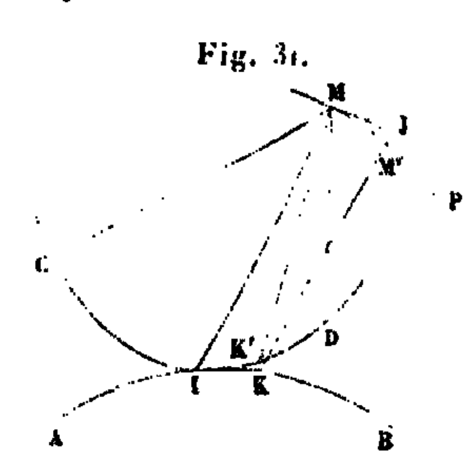
La particularité que présente la normale à toute développante d'aboutir au point correspondant de contact de sa droite génératrice

(¹) Dont il a été question p. 115.

avec la développée, n'est qu'un cas particulier d'une propriété générale des roulettes, découverte par Descartes, et qu'on peut énoncer ainsi : *La normale à une roulette passe à chaque instant par le point actuel de contact de la courbe mobile et de la courbe fixe.*

Il s'agit donc de démontrer que la normale menée en M à la roulette MP est la droite MI joignant ce point M au point de contact, I, de AB et de CD. Observons, à cet effet, qu'un déplacement infiniment petit de la figure mobile, propre à lui faire décrire l'arc élémentaire MM' de roulette, aura lieu par le roulement d'un arc généralement comparable IK' de CD sur son équivalent IK dans la courbe fixe, et amènera le transport de la droite MK', liée à la figure mobile, dans la position M'K. Or ce transport peut être assimilé à une simple rotation autour du point K. Pour le reconnaître, démontrons que le déplacement K'K de l'extrémité K' est infiniment plus petit que celui MM' de l'extrémité M. Projetons les deux arcs équivalents IK, IK' sur leur tangente commune en I et, par conséquent, sous des angles infiniment petits : le rapport de ces deux projections différera infiniment peu de l'unité et les deux pieds, que j'appellerai k, k', des perpendiculaires abaissées de K et de K' sur la tangente, seront l'un de l'autre à une distance kk' infiniment moindre que IK ou que MM'. Comme d'ailleurs, par suite du contact de ces arcs IK, IK' avec leur tangente en M, les deux écarts Kk, K'k' de K et de K' d'avec cette tangente sont encore infiniment petits par rapport à IK ou à MM', il en sera évidemment de même de la droite KK' qui joint ces points. Et si nous comparons, pour en prendre la différence M'J, les deux distances KM, KM' du point K aux deux points consécutifs M et M' de la roulette, cette différence entre KM et KM', ou entre KM et K'M, sera celle de deux côtés d'un triangle KMK' ayant KK' pour troisième côté, c'est-à-dire qu'elle sera inférieure à KK' et, par suite, infiniment plus petite que l'arc ou la corde MM'. Donc l'arc MM' de roulette ne s'écarte d'un arc de cercle MJ, décrit du point K comme centre, que d'une quantité JM' ayant avec la corde MM' un rapport infiniment petit, et, par conséquent, d'après la proportion des sinus, le triangle JM'M que ferme la corde MJ du cercle a son angle M, opposé au côté JM', infiniment petit aussi. C'est dire que, à la limite où K vient en I et où

Fig. 31.



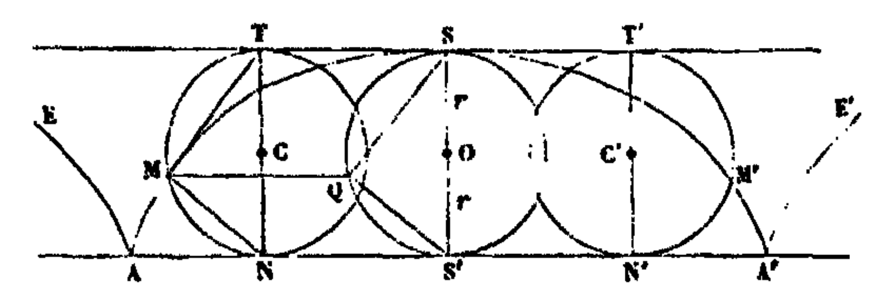
les cordes MM′, MJ prolongées deviennent respectivement les tangentes en M à la roulette et au cercle, ces deux tangentes n'en font qu'une et correspondent à une même normale MI.

On appelle *centre instantané de rotation* de la figure mobile, le point I centre des cercles tangentiellement auxquels se déplacent ainsi tous les points de cette figure. On peut, en effet, tant qu'il s'agit d'avoir seulement *la direction actuelle* ou *instantanée* des roulettes décrites, ne pas distinguer celles-ci des cercles mêmes, ou regarder le mouvement de CMD comme une simple rotation autour de I.

115. — De la cycloïde; normale et tangente à cette courbe.

Une cycloïde est la roulette décrite par tout point d'une circonférence qui roule sur une droite indéfinie. S'il s'agit, par exemple, de la circonférence C dont le rayon CN, donné, sera exprimé par r, et si, cette circonférence roulant sur AA′, le *point décrivant* est M, la cycloïde sera la ligne EASA′E′. Cette courbe se compose évidemment d'une infinité de parties égales, telles que ASA′, comprises entre deux points consécutifs A, A′ où le point décrivant M vient toucher la droite fixe AA′. Chacune d'elles s'appelle un *arceau* de la cycloïde, et la portion AA′ qu'elle intersecte sur la droite fixe est la *base* de l'arceau. Quand la circonférence roule de A en A′, tous ses éléments,

Fig. 32.



infiniment petits, de plus en plus éloignés de M le long de MNT, viennent s'appliquer successivement sur des éléments égaux de AA′ de plus en plus éloignés de A; de sorte qu'on a, par exemple, en construisant le cercle mobile dans diverses positions et notamment dans celle où le point décrivant est au sommet S de sa course,

$$\text{arc NM} = \text{NA}, \qquad \text{arc S'QS} \quad \text{ou} \quad \pi r = \text{S'A}, \qquad \text{arc N'T'M'} = \text{N'A}.$$

Enfin, au moment où le point décrivant arrive en A′, toute la circonférence MNTM s'est comme déroulée de A en A′, et l'on peut écrire $AA' = 2\pi r$. Par suite, en retranchant, d'une part, AN′ de AA′, d'autre part, N′T′M′ d'une circonférence entière, il vient arc N′M′ = N′A′.

C'est dire que la cycloïde pourrait être décrite aussi par le point M' d'une circonférence C' égale à la proposée C, mais qui, partie du point A' et non du point A, roulerait sur la base AA' en allant de A' vers A et non plus de A vers A'. Si l'on suppose que les deux circonférences mobiles C et C', décrivant ainsi toutes les deux la cycloïde, soient constamment symétriques par rapport à la perpendiculaire SS' abaissée sur AA', on aura S'N' = S'N et, par suite (vu que $S'A' = S'A = \pi r$), N'A' = NA, arc N'M' = arc NM. Donc le point M' sera symétrique de M par rapport à SS'. Ainsi, *un arceau de cycloïde est symétrique de part et d'autre de la perpendiculaire abaissée de son sommet sur sa base.*

D'après la propriété générale des normales aux roulettes, la normale menée en M à la cycloïde va passer par le point correspondant de contact, N, de la circonférence mobile et de la droite fixe. Quant à la tangente, comme elle doit être perpendiculaire à la normale MN, on l'aura en joignant le point M à l'extrémité T du diamètre NT tiré à partir de N; en effet, l'angle TMN sera droit comme inscrit dans une demi-circonférence. Amenons le cercle C en OSS', en faisant décrire à tous ses points des lignes égales et parallèles à NS' : les figures telles que MNS'Q, MTSQ seront des parallélogrammes et les cordes QS', QS se trouveront parallèles respectivement à MN, MT. On pourrait donc, sans que le cercle C fût construit, mener en un point donné M la tangente et la normale à la cycloïde, en tirant de M une parallèle MQ à la base AA' jusqu'à la rencontre du cercle fixe O, au point Q, puis en joignant ce point Q aux deux extrémités du diamètre SS' et en menant enfin les parallèles MT et MN à ces deux droites QS, QS'.

Aux extrémités A et A' d'un arceau, la tangente se trouvera évidemment perpendiculaire à la base AA', car elle y sera parallèle à S'S : donc, *au point où deux arceaux contigus se joignent, la tangente est commune aux deux arceaux et la courbe présente ce qu'on appelle un rebroussement de première espèce* (¹).

146. — Développée et rayon de courbure de la cycloïde.

Soit ASA' (p. 221) un arceau de cycloïde. Menons au-dessous de sa base, à une distance S'B égale à sa *hauteur* SS', une parallèle HI à cette base AA'; et construisons une nouvelle cycloïde ABA' égale à la première, mais placée de telle manière que deux demi-arceaux BA, BA' aient leur point de départ commun sur le prolongement de SS' et leurs

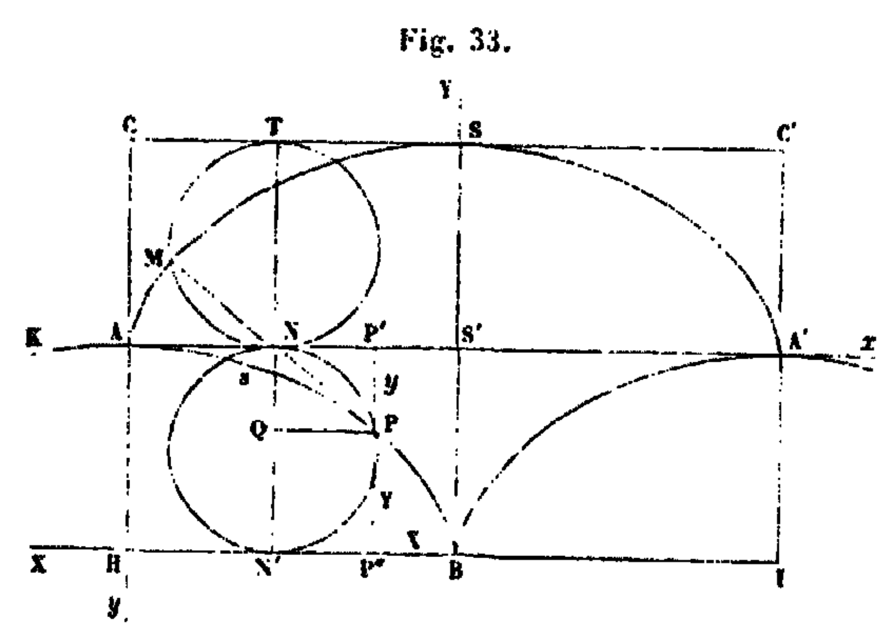
(¹) *Voir* fascicule II, p. 160*.

sommets respectifs en A, A′. Le demi-arceau BA pourra être supposé décrit par le point P d'une circonférence NPN′, qui roulerait sur BH, de B vers H; en sorte que l'on ait, dans une quelconque de ses positions, arc N′P = N′B = NS′ et, par suite,

$$\text{arc}\, NP = \pi r - N'P = AS' - NS' = NA.$$

Cela posé, si l'on construit, pour la cycloïde donnée ASA′, le cercle générateur TMN, dans la position où il est tangent en N au cercle égal NPN′, le point M correspondant de cette cycloïde sera lui-même tel, que arc NM = NA. Donc les deux arcs NP, NM, tous les deux équivalents à NA, sont égaux entre eux; et, par suite, leurs supplé-

Fig. 33.



ments PN′, MT le sont également. Il en résulte, d'une part, que les deux cordes NP, NM sont égales, d'autre part, que les deux angles inscrits PNN′, MNT, dont la mesure est $\frac{1}{2}$PN′ = $\frac{1}{2}$MT, sont égaux. Et, comme leurs deux côtés NN′, NT, étant des diamètres normaux à la tangente AA′ commune aux deux cercles, se trouvent en ligne droite, il faut que ces deux angles égaux PNN′, MNT soient exactement opposés par le sommet, ou que NP soit le prolongement de MN. D'ailleurs, d'après la règle donnée tout à l'heure pour construire la normale et la tangente à une cycloïde, MN est normal à la première ASA′ et NP tangent à la seconde ABA′. Cela étant vrai pour toutes les positions correspondantes possibles des deux cercles, on voit que les normales de la première cycloïde coïncident avec les tangentes de la seconde et que, par suite, celle-ci, sur laquelle se coupent successivement ses propres tangentes ou cordes infiniment petites consécutives, est le lieu des intersections successives des normales à la proposée, c'est-à-dire sa développée même.

Donc *la développée d'une cycloïde est une cycloïde égale.*

De plus la relation $NP = MN$ montre que MP vaut le double de MN, et, comme MP est évidemment le rayon du cercle osculateur pour le point M de la courbe donnée, on voit que *le rayon de courbure, dans la cycloïde, égale le double de la normale menée à la courbe jusqu'à la rencontre de sa base.*

147. Rectification de la cycloïde.

D'après la seconde propriété générale des développées, la longueur d'une partie, AP, de l'arceau BAK..., comptée à partir du sommet A de l'arceau, équivaut à la différence des deux rayons de courbure menés, de ses extrémités P et A, à la développante AS. L'un de ces rayons de courbure étant PM, et l'autre étant nul (puisque ses deux extrémités se trouvent réunies en A), il vient

$$\text{arc}\,PA = PM = 2PN;$$

et, à l'instant où le point mobile P arrive en B,

$$\text{arc}\,BA = BS = 2BS' = 4r.$$

Le demi-arceau BA vaut donc en longueur le double du diamètre du cercle générateur, c'est-à-dire de sa propre projection BS' sur une perpendiculaire à la base; et, par suite, *un arceau complet de cycloïde est quatre fois aussi long que haut.* Ce résultat simple, qu'avait précédé à peine le calcul de la longueur des arcs de seconde parabole cubique (p. 212), frappa extrêmement les géomètres du XVIIe siècle, portés à penser jusque-là que le cercle était, de toutes les courbes, la moins difficile à rectifier. La longueur de l'arceau se trouve donc commensurable avec sa hauteur, tandis que sa base ne l'est pas, puisqu'elle égale la circonférence du cercle générateur, ou $\pi = 3,14159\ldots$ fois la hauteur.

La relation $\text{arc}\,PA = 2PN$ conduit immédiatement à une équation importante. Prenons pour axe des x la tangente AA' menée au sommet A d'un arceau, et pour axe des y la perpendiculaire AH abaissée de ce point A sur la base de l'arceau. Appelons enfin s l'arc AP, compté positivement quand le point quelconque P de l'arceau est du côté des x positifs, négativement quand il est du côté opposé, c'est-à-dire en allant de A vers K. La droite NP, dans le triangle rectangle déterminé par les trois points N, P, N', sera moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse $NN' = 2r$ et le segment $NQ = P'P$, qui n'est autre que l'ordonnée y du point P. On aura donc $NP = \sqrt{2ry}$, et, par suite,

$AP = 2\sqrt{2ry}$ ou $\pm s = 2\sqrt{2ry}$. En élevant au carré et résolvant par rapport à y, il vient la relation cherchée

$$(1) \qquad y = \frac{s^2}{8r} = \frac{1}{8r}s^2.$$

Donc, dans un arceau de cycloïde, *l'ordonnée, tirée perpendiculairement d'un point quelconque de l'arceau sur la tangente au sommet, est proportionnelle au carré de l'arc correspondant compté à partir du sommet.*

148. — Équation naturelle finie et équation différentielle de la cycloïde.

La relation (1) définit parfaitement la courbe ou, en d'autres termes, n'est vérifiée que dans une cycloïde; car, à partir de l'origine des arcs où s'annule y et où l'on prend l'origine des abscisses x, elle détermine de proche en proche ces abscisses en fonction de s, non moins que les ordonnées y. En effet, si l'on fait, dans (1), croître s de ds, et, par conséquent, y de dy, s^2 croîtra de $2s\,ds$; ce qui donnera comme valeur de dy le quotient de $s\,ds$ par $4r$. Or on sait que l'accroissement simultané dx de l'abscisse est lié à dy et à ds par la relation $dx^2 = ds^2 - dy^2$. Substituons à dy sa valeur, puis divisons par ds^2 et extrayons la racine carrée en observant que l'on est convenu de compter, à partir de l'origine, les abscisses croissantes dans le même sens que les arcs croissants; en sorte que la dérivée de x en s doit être positive pour $s = 0$ et ensuite partout, par raison de continuité, jusqu'à ce qu'elle s'annule. Il viendra

$$(2) \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{16r^2 - s^2}}{4r}.$$

Les abscisses successives x sont donc déterminées de proche en proche par l'équation (1), en fonction des arcs s, comme le sont les ordonnées d'une courbe en fonction de son abscisse quand on donne, pour toutes les valeurs de celle-ci, à partir d'une ordonnée nulle, les pentes successives y' de la courbe (p. 34). Ainsi, entre les limites $s = \mp 4r$ où le second membre de (2) ne s'annule pas, une courbe satisfaisant à la relation (1) a sa forme entièrement définie; et elle ne peut différer de l'arceau de cycloïde de hauteur $2r$ qui nous a conduit à cette relation (1).

La relation (1) *caractérise* donc *parfaitement un arceau de cycloïde et elle en est,* à cause de son extrême simplicité, *l'équation naturelle.* Elle fait de la cycloïde la courbe en quelque sorte la plus

élémentaire après la ligne droite, quant aux rapports reliant l'ordonnée à l'arc, et lui confère le premier rôle dans plusieurs questions importantes de Mécanique où interviennent les chemins s parcourus par un mobile concurremment avec leurs projections verticales y. En effet, dans la ligne droite, l'ordonnée n'est pas moins proportionnelle à l'arc qu'à l'abscisse (l'un et l'autre étant comptés à partir du point où l'axe des abscisses coupe la ligne), ce qui est la relation la plus simple possible; mais la moins compliquée après celle-là consiste naturellement dans la proportionnalité de l'ordonnée au carré de l'arc. Il existe, à cet égard, quelque analogie entre la cycloïde et la parabole, qui, rapportée à sa tangente au sommet comme axe des x et à la normale correspondante comme axe des y, a son ordonnée proportionnelle au carré de l'abscisse. Grâce à cette proportionnalité, la parabole est la courbe la plus simple après la ligne droite au point de vue de la relation existant entre l'ordonnée et l'abscisse, tandis que la cycloïde l'est pour la relation existant entre l'ordonnée et l'arc.

Le plus souvent, dans les problèmes, la relation (1) se présente sous la forme d'une équation différentielle d'où l'arc s est éliminé. Divisons la dérivée de y en s que donne cette équation (1) par l'expression (2) de la dérivée analogue de x; et, dans le quotient, remplaçons s par sa valeur même $\pm\sqrt{8ry}$ tirée de (1). Il viendra *l'équation différentielle de la cycloïde*

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{y}{2r-y}}.$$

Si l'on suppose pour un instant les y pris comme abscisses et les x comme ordonnées, cette équation déterminera, pour toutes les abscisses y à partir de l'origine choisie $y=0$, la suite des *pentes* $\frac{dx}{dy}$ de la courbe, dans chacun des quatre angles des coordonnées; et, par conséquent, elle définira de proche en proche cette courbe, de part et d'autre de l'axe des abscisses y, lesquelles seront essentiellement positives pour que le radical de (3) reste réel à partir de la valeur $y=0$. C'est dire que l'équation (3) ne peut être vérifiée dans aucune autre courbe qu'un arceau de cycloïde de hauteur $2r$, et qu'elle équivaut parfaitement à (1).

Au lieu des axes précédents AA' et AH se croisant au sommet d'un arceau, on adopte souvent pour axe des x la base BX de l'arceau et pour axe des y la tangente perpendiculaire BS menée à une de ses extrémités. La nouvelle abscisse, que j'appellerai X, du point quelconque P de l'arceau BAK... de la figure précédente (p. 221), et sa

nouvelle ordonnée, que j'appellerai Y, sont BP″, P″P, et égalent respectivement les différences algébriques $AS' \mp AP'$, $P''P' - PP'$, ou $\pi r - x$, $2r - y$. Il faut donc, dans la formule (3), poser

$$x = \pi r - X, \quad y = 2r - Y \text{ et, par suite, } dx = -dX, \quad dy = -dY.$$

Il vient alors l'équation différentielle de la cycloïde sous sa forme la plus employée

$$\frac{dY}{dX} = \sqrt{\frac{2r}{Y} - 1}. \qquad (4)$$

Comme il suffit, pour la rendre identique à (3), d'y renverser le sens des abscisses et celui des ordonnées, en prenant comme nouvelle origine le *sommet* d'où part l'ordonnée maximum $Y = 2r$ (au-dessus de laquelle le radical devient imaginaire), cette équation, toutes les fois qu'elle se présente dans la recherche d'une courbe, prouve que la courbe appartient à une cycloïde de hauteur $2r$ rapportée à la base de ses arceaux pour axe des X.

149. — Aires comprises entre un arceau de cycloïde et sa développée ou sa base.

Quoique l'évaluation des aires relève du Calcul intégral, servons-nous encore de la figure ci-dessus (p. 221), 1° pour obtenir l'aire comprise entre l'arceau ASA′ de cycloïde et sa développée ABA′, 2° pour voir comment cette surface est divisée par la base AA′ de l'arceau.

Et d'abord, les demi-arceaux AB, BA′ étant parfaitement égaux, tant pour la longueur que pour la forme, aux demi-arceaux SA′ et AS, les figures respectives APBS′, A′BS′ et SA′C′, SAC, formées par ces courbes et leurs tangentes extrêmes, sont toutes superposables; de sorte que les deux surfaces mixtilignes APBS′ et A′BS′ peuvent être portées en SA′C′ et SAC. La surface à évaluer ASA′B sera ainsi transformée en un rectangle AA′C′C, dont l'aire égale $AA' \times SS'$ ou $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$. Par conséquent, *l'aire comprise entre un arceau de cycloïde et sa développée vaut quatre fois celle du cercle générateur de la cycloïde.*

Divisons maintenant cette surface ASA′B, pour voir comment la partage la base AA′ de l'arceau, en triangles infiniment aigus, par des normales comme MP, qui iront se couper, successivement, infiniment près de la développée AB, aux sommets respectifs de ces triangles. Chaque normale étant, comme on a vu, intersectée par AA′ en son milieu, la partie des triangles située entre AA′ et leurs sommets

constituera de nouveaux triangles ayant avec les proposés un angle commun, mais les côtés adjacents moitié moindres, à des différences infiniment petites près. Ces triangles partiels vaudront donc tous, à la limite, un quart des triangles entiers et, par suite, la partie AS′A′B de l'aire totale $4\pi r^2$ en sera également le quart ou aura comme valeur πr^2; ce qui laissera trois fois plus, ou $3\pi r^2$, pour la partie AS′A′S. Ainsi, *la surface comprise entre la base et la développée d'un arceau de cycloïde égale celle du cercle générateur de la cycloïde, tandis que la surface comprise entre l'arceau et sa base en est le triple.*

130*. — Des spirales et des coordonnées polaires.

(Compléments, p. 198*.)

131*. — Tangente, normale, sous-tangente, sous-normale, différentielle de l'arc et rayon de courbure, en coordonnées polaires.

(Compléments, p. 200*).

132*. — De la spirale d'Archimède et de la spirale logarithmique.

(Compléments, p. 201*.)

133*. — Propriété caractéristique de la tangente à la spirale logarithmique.

(Compléments, p. 203*.)

134*. — Rayon de courbure et développée de la spirale logarithmique.

(Compléments, p. 204*.)

SEIZIÈME LEÇON.

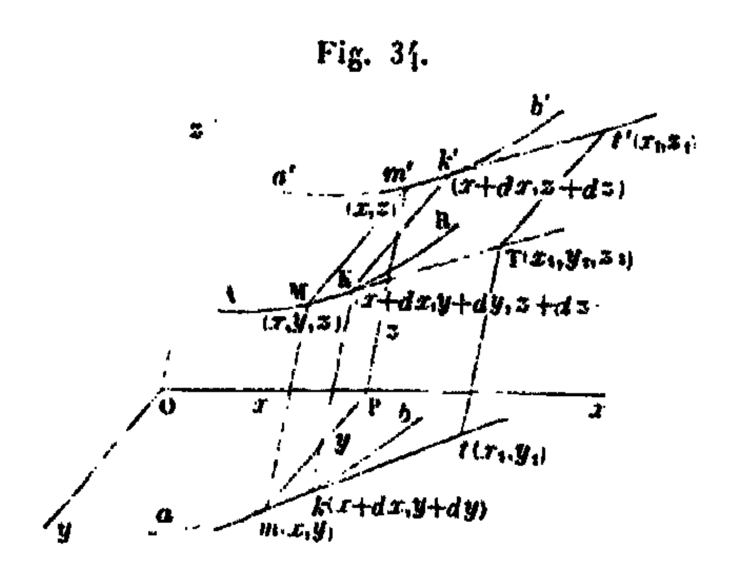
DES COURBES GAUCHES : TANGENTE ET * POINTS SINGULIERS, ARC, PLAN NORMAL, PLAN OSCULATEUR, NORMALE PRINCIPALE ET BINORMALE.

155. — Équations d'une courbe gauche.

Une ligne, qu'on peut toujours se représenter comme la trace d'un point mobile et comme l'intersection de deux surfaces, est appelée *courbe gauche*, lorsque quatre consécutifs de ses points, pris aussi près que l'on veut l'un de l'autre, ne sont pas contenus dans un même plan, le quatrième sortant du plan mené suivant les trois premiers. On rapporte une telle courbe, AB, comme on ferait d'ailleurs pour des lignes planes arbitrairement situées dans l'espace, à un système de trois axes rectilignes Ox, Oy, Oz; et chacun de ses points, tel que M, est déterminé par ses trois coordonnées $OP = x$, $Pm = y$, mM ou $Pm' = z$.

Quand la ligne est censée décrite par un mobile M, ces trois coor-

Fig. 34.



données x, y, z deviennent, comme nous avons déjà vu (p. 23), trois fonctions du temps t, pouvant être quelconques si la courbe l'est elle-même. Celle-ci a donc alors trois équations, de la forme $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, qui expriment en même temps la manière par-

ticulière dont elle est décrite. Aussi, malgré leur symétrie en x, y, z, ou l'analogie du rôle qu'y jouent les trois coordonnées, tandis que celui de variable indépendante y est laissé au temps t, bien désigné pour ce rôle tout spécial et unique par sa nature absolument différente de celle de x, y, z, ces équations sont-elles assez rarement les plus simples; et, dans bien des applications, il est préférable de n'y faire figurer que les coordonnées x, y, z des points de la courbe, pour en élaguer ce qui varierait avec le mode de description. A cet effet, on élimine t, en concevant, par exemple, sa valeur en fonction de x tirée de la première équation $x = f_1(t)$ et substituée dans les deux autres. Il vient alors, pour représenter la courbe, deux équations seulement, de la forme $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, où les deux fonctions f et φ peuvent être quelconques, car elles ne différeraient pas des deux, restées arbitraires, f_2 et f_3, si l'on faisait décrire la courbe de manière à avoir constamment $t = x$.

Ces deux équations $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ suffisent bien d'ailleurs pour définir chaque branche de courbe coupée en un seul point M par tout plan $m\mathrm{P}m'$ parallèle aux yz; car, dès que ce plan est donné ou que l'on connaît son abscisse x, le point M qu'il contient, de la courbe, se construit de suite, en y menant bout à bout les coordonnées dès lors connues $\mathrm{P}m = y = f(x)$ et $m\mathrm{M} = z = \varphi(x)$, suivant les sens respectifs de Oy et de Oz, ou leurs opposés (quand y ou z sont négatifs). Et l'on voit que, à l'inverse, toute branche de courbe, construite en même temps que le système des axes, revient à se donner au moins empiriquement ces deux équations $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$; car il suffit alors de connaître OP ou x, pour que le plan $m\mathrm{P}m'$, en coupant la courbe, détermine M et, par suite, mM ou z et Pm ou y: y et z deviennent donc deux certaines fonctions de x. Lorsque plusieurs branches de la courbe se déroulent à la fois en face des mêmes points de l'axe Ox, c'est-à-dire pour les mêmes abscisses x, les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ comportent plus d'une série distincte de valeurs; mais on peut les regarder toujours comme bien déterminées, en n'y considérant que la série en rapport avec la branche suivie actuellement.

Deux des coordonnées du point M, x et y par exemple, lui sont communes avec sa *projection*, m, sur le plan de ces coordonnées ou des xy, projection obtenue en menant une parallèle Mm à l'axe Oz de la troisième coordonnée, et que je qualifierai d'*oblique* toutes les fois que cet axe ne sera pas normal au plan des deux autres, afin de la distinguer de la projection ordinaire ou *orthogonale*, qui serait le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur le plan. Et, de même,

j'appellerai projection *oblique* d'un point M sur l'un des axes, celui des x par exemple, le point P obtenu en menant à partir de M un plan MmP, non pas normal à Ox, mais parallèle au plan des autres coordonnées y, z. Ces dénominations s'étendront d'ailleurs aux projections analogues de figures quelconques, qui seront toujours des *lieux* de points.

L'équation $y = f(x)$ est donc celle de la projection oblique ab de la courbe AB sur le plan des xy; et, de même, l'autre équation $z = \varphi(x)$, ou $Pm' = \varphi(OP)$, est celle de la projection oblique $a'b'$ de AB sur le plan des xz. Une branche de courbe gauche AB se trouve ainsi définie au moyen de ses projections obliques ab, $a'b'$ sur deux plans coordonnés; et chacun, M, de ses points, s'obtient par l'achèvement du parallélogramme $mPm'M$ dont deux côtés adjacents Pm, Pm' sont, dans les deux plans respectifs de ces deux projections, les ordonnées y et z de points m, m' ayant l'abscisse $x = OP$ du point cherché M de la courbe de l'espace. Quand cette courbe est gauche, il est impossible qu'elle ait un arc même très petit (qui comprendrait toujours une infinité de points consécutifs) dans le plan mPm' et, pour une abscisse x, il n'y existe, sur toute branche comme AB, qu'un seul point M.

Il faudrait que la ligne fût plane et contenue dans un plan parallèle aux yz pour que l'abscisse x, réduite à une valeur constante, devînt impropre à jouer le rôle de variable indépendante; et alors la projection (orthogonale ou oblique) de la courbe sur le plan des yz lui serait évidemment parallèle et égale. C'est donc sur ce plan des yz qu'on projetterait la courbe proposée, et au moyen de son équation entre y et z qu'on en ferait l'étude. Quant à sa projection soit sur le plan des xy, soit sur celui des xz, elle se réduirait à une droite. A cause de ce dernier fait, une courbe plane est dite *à simple courbure*. On entend par là que, des deux projections planes généralement nécessaires à considérer dans l'étude d'une courbe, une seule, bien choisie, suffit pour faire connaître une ligne plane, l'autre, qu'on lui associerait, étant droite. Autrement dit, une telle ligne est *une* courbe sur un des deux plans de projection dont il s'agit, mais *sans courbure* sur l'autre. Et l'on qualifie les lignes gauches, par opposition, de *courbes à double courbure*, pour exprimer qu'elles sont vues toujours sous la forme de deux courbes, en projection sur deux plans quelconques.

Les deux équations $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ peuvent être considérées encore comme celles des deux *cylindres*, ou plutôt des deux *surfaces cylindriques*, abBA, $a'b'$BA, dont les génératrices, telles que mM

et $m'M$, respectivement parallèles à Oz et à Oy, s'appuient sur les deux projections ab, $a'b'$ de la courbe proposée AB; et celle-ci, lieu des points qui leur sont communs ou qui vérifient à la fois ces équations, est alors l'intersection des deux cylindres. Mais il y aura souvent avantage à remplacer de pareils cylindres par un groupe de deux autres surfaces dont les intersections comprennent la leur et dont les équations soient de la forme $F(x, y, z)=0$, $\Phi(x, y, z)=0$, avec deux premiers membres F, Φ fonctions continues et à dérivées premières continues pour toutes les valeurs finies possibles des variables x, y, z. Alors, en effet, et on le verra bientôt [1], pareillement à ce qui a été démontré dans des cas analogues (pp. 45* et 49*) au sujet des courbes planes et au sujet des surfaces, l'intersection représentée par le système des équations non résolues $F(x, y, z)=0$, $\Phi(x, y, z)=0$ sera généralement une courbe sans commencement ni fin, ni bifurcation, ni jarret, où se trouveront par suite réunies *toutes* les branches dont l'association pourra former *un tout naturel*, et que représentent séparément les équations explicites $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$, quand $f(x)$, $\varphi(x)$ sont, par exemple, affectés de radicaux à signes multiples.

156. — Tangente aux courbes gauches.

L'idée de l'existence d'une direction déterminée et, par conséquent, d'une tangente en chaque point (x, y, z) d'une courbe gauche, est comprise immédiatement dans notre intuition de toute ligne courbe. Il est bon cependant de remarquer qu'il suffirait d'avoir cette idée relativement aux lignes planes, pour qu'elle s'étendît de suite aux lignes gauches. En effet, si, dans les deux projections planes ab, $a'b'$ (figure précédente, p. 227) de la courbe gauche AB, on considère deux cordes infiniment petites mk, $m'k'$ prolongées jusqu'en t, t', projections d'une corde infiniment petite MK, prolongée de même jusqu'en T, de la courbe AB, il suffira que ces deux tangentes ou positions limites mt, $m't'$ de sécantes aux courbes planes soient parfaitement déterminées, c'est-à-dire que la direction de cordes de plus en plus petites ait en m et en m' une limite définie, pour que la position de MT ne soit pas moins fixée, vu l'impossibilité où elle serait de varier, sans qu'il en fût de même de l'une au moins de ses deux projections obliques ab, $a'b'$.

Donc la tangente MT à la courbe gauche existe, et elle a pour projections obliques les tangentes mt, $m't'$ menées aux projections analogues

---

[1] Dans le fascicule II, p. 207*.

de cette courbe. Si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées d'un quelconque, T, de ses points (ou *coordonnées courantes*), x_1, y_1 et x_1, z_1 seront respectivement celles de t et de t', et la tangente MT aura pour équations les équations mêmes de ses deux projections mt, $m't'$, savoir, en appelant y', z' les deux dérivées des fonctions $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$,

$$(1) \qquad y_1-y=y'(x_1-x), \qquad z_1-z=z'(x_1-x).$$

Mais, si la courbe AB était considérée comme la trajectoire d'un point mobile M, ou que x, y, z fussent trois fonctions données $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$ d'une variable auxiliaire t, on observerait directement que, le long de la droite MT, les trois différences x_1-x, y_1-y, z_1-z, projections obliques de MT sur les trois axes, gardent entre elles les mêmes rapports quand le point T se déplace, et qu'elles sont, par conséquent, proportionnelles à leurs valeurs $dx=x'\,dt$, $dy=y'\,dt$, $dz=z'\,dt$ relatives au moment où le point T est à la seconde extrémité K de la corde infiniment petite MK. On aurait donc, comme équations de la tangente,

$$(2) \qquad \frac{x_1-x}{x'}=\frac{y_1-y}{y'}=\frac{z_1-z}{z'},$$

relations qui se réduisent bien à (1) par l'hypothèse $t=x$, c'est-à-dire quand on a $x'=1$ et que y, z deviennent fonction de x.

Enfin, si la ligne proposée AB est définie comme intersection de deux surfaces $F(x, y, z)=0$ et $\Phi(x, y, z)=0$, leurs plans tangents en (x, y, z), lieux respectifs des tangentes menées en ce point aux courbes s'y croisant sur chaque surface, devront tous les deux, puisque AB appartiendra à la fois aux deux surfaces, contenir la tangente MT, qui sera dès lors leur intersection. D'après l'équation des plans tangents démontrée vers le commencement de ce Cours ([1]), les deux équations de la tangente seront

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx}(x_1-x)+\dfrac{dF}{dy}(y_1-y)+\dfrac{dF}{dz}(z_1-z)=0, \\ \dfrac{d\Phi}{dx}(x_1-x)+\dfrac{d\Phi}{dy}(y_1-y)+\dfrac{d\Phi}{dz}(z_1-z)=0. \end{cases}$$

On les aurait déduites, par exemple, de (1), en observant que les deux

([1]) Elle ne l'a encore été, sous la forme employée ici, que dans le Fascicule II (p. 49*); mais, pour déduire cette forme de la plus simple (17) donnée à la p. 95, il suffit de substituer, aux deux dérivées partielles p, q de l'ordonnée z, leurs valeurs obtenues, comme on a vu p. 120, en différentiant par rapport à x et à y l'équation $F=0$ ou $\Phi=0$ de la surface.

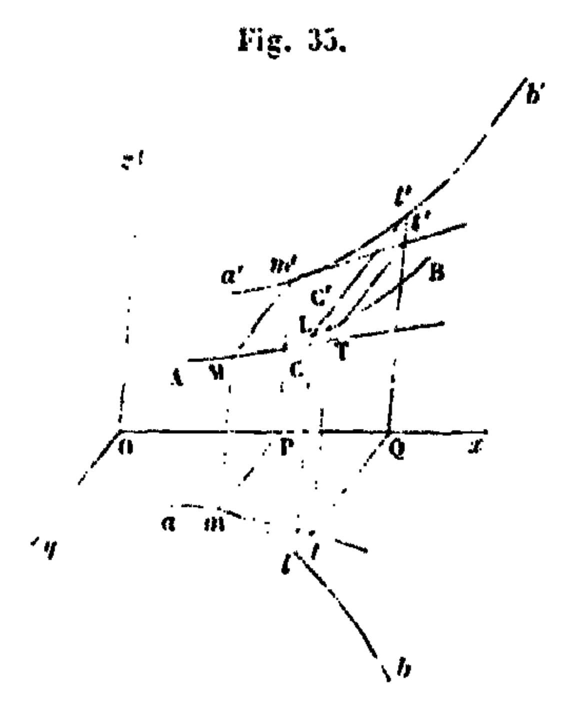
dérivées, y', z', des fonctions implicites y, z de x définies par les relations $F = 0$, $\Phi = 0$, résultent des deux relations *dérivées*

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dz} z' = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy} y' + \frac{d\Phi}{dz} z' = 0:$$

en multipliant celles-ci par $x_1 - x$, les produits $y'(x_1 - x)$ et $z'(x_1 - x)$ s'en seraient éliminés de suite au moyen de (1), ce qui aurait bien donné les équations (3).

Remarquons en terminant que, si, à partir du point M, on prend un arc de la courbe très petit, ML, dont on considérera également les projections obliques ml, $m'l'$, et si l'on mesure, dans un plan lQl' parallèle aux yz, les écarts respectifs LT, lt, $l't'$ de leurs secondes extrémités d'avec les tangentes MT, mt, $m't'$ menées aux premières M, m, m', ces écarts seront du même ordre pour la courbe gauche que pour les courbes planes ses projections, c'est-à-dire, en général, du second ordre, ou comparables aux carrés soit des arcs ML, ml, $m'l'$, soit de leur projection oblique PQ sur l'axe des abscisses x, longueurs généralement de l'ordre de la distance normale des deux plans parallèles mPm', lQl'. En effet, l'écart LT pour la courbe de l'espace est la diagonale du parallélogramme CTC'L construit sur

Fig. 35.



deux côtés TC, TC' égaux et parallèles aux écarts tl, $t'l'$, suivant Oy, Oz, relatifs aux deux courbes ab, $a'b'$. Or, l'angle CTC' ou yOz n'étant infiniment voisin ni de zéro, ni de deux droits, il est clair que la diagonale LT se trouve de l'ordre du plus grand des écarts lt, $l't'$.

La même démonstration s'appliquerait évidemment si la tangente MT était remplacée par une ligne quelconque issue de m, et mt, $m't'$

par les projections respectives de cette ligne sur les deux plans des xy et des xz. Elle montrerait que l'écart de cette ligne d'avec la proposée ML, mesuré dans le plan lQl', serait comparable au plus grand des deux écarts analogues de ses deux projections d'avec celles, ml, $m'l'$, de la courbe ML. Autrement dit, *l'ordre du contact de deux courbes dans l'espace est celui de leurs projections respectives sur deux plans coordonnés, quand les écarts, dans ces deux plans, sont mutuellement comparables.*

157*. — Supériorité de la forme implicite des équations sur leur forme explicite, pour représenter à la fois la totalité d'une courbe gauche: points singuliers.

(Compléments, p. 207*.)

158. — Parallélépipède infinitésimal et cosinus directeurs de la tangente; de l'arc comme variable indépendante.

Le calcul de la différentielle d'un arc s de courbe nous a conduit, dès le début de ce Cours (p. 44), à une construction qui montre bien les rapports existant entre la direction de la tangente, ou de l'élément ds de courbe émané du point (x, y, z) de contact, et les directions des axes. Cette construction consiste en un parallélépipède, qui, à partir du sommet $M(x, y, z)$, a pour diagonale l'élément même $ds = MM'$, susceptible, à la limite, d'être confondu avec sa corde, et pour arêtes ses trois projections (obliques) $dx = \pm MP$, $dy = \pm MQ$, $dz = \pm MR$, sur trois parallèles aux axes, projections qu'on prendra positivement ou négativement suivant que, à partir de M, elles seront dirigées dans les sens des x, y, z positifs ou dans ceux des x, y, z négatifs. Un tel parallélépipède, qu'on pourrait, pour plus de simplicité, réduire au tétraèdre ayant comme arêtes issues du point (x, y, z) l'élément $ds = MM'$ avec ses deux projections (obliques) sur la droite MP parallèle aux x et sur le plan PMQ parallèle aux xy, remplira évidemment, pour les courbes de l'espace, le même rôle que le triangle infinitésimal de Barrow (p. 184) pour les courbes d'un plan.

Bornons-nous au cas particulièrement usuel d'axes rectangulaires, afin que dx, dy, dz soient des projections orthogonales de ds; et appelons α, β, γ les trois angles que fait, avec les axes des x, y, z positifs représentés par leurs parallèles issues de M, la tangente, prolongement de la corde $ds = MM'$. Ces angles étant précisément ceux sous lesquels ds a pour projections, en grandeur et en signe, dx, dy, dz, celles-ci égalent respectivement $ds\cos\alpha$, $ds\cos\beta$, $ds\cos\gamma$; et les trois

cosinus directeurs de la tangente sont, en conséquence, exprimés par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \dfrac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \dfrac{dz}{ds}, \\ \text{où} \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \end{cases}$$

La tangente se trouve ainsi menée dans le sens même suivant lequel la courbe est censée décrite par un point mobile, c'est-à-dire de M, où les coordonnées sont x, y, z, vers M', où elles sont $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, et où la variable indépendante (quelconque) t a crû de la quantité positive dt, en même temps que l'arc déjà *parcouru* s, qui se prend ici en valeur absolue, a crû de la quantité non moins positive ds. Donc, si, dans les formules (6), on substitue à dx, dy, dz, ds, les produits, par dt, des dérivées correspondantes x', y', z', s', le radical $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, valeur de s', devra être pris en grandeur absolue; et l'on aura, sous une forme un peu condensée devenue familière,

$$(7)\qquad \cos(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{(x', y', z')}{s'}, \quad \text{où} \quad s' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

Ces formules atteindront leur plus haut degré de simplicité en posant $t=s$ comme il a été déjà indiqué au n° 15 (p. 45), c'est-à-dire en choisissant l'arc s pour variable indépendante. Alors $s'=1$ et il vient

$$(8)\quad \cos\alpha = x', \qquad \cos\beta = y', \qquad \cos\gamma = z', \quad \text{avec} \quad x'^2+y'^2+z'^2 = 1,$$

ce qu'exprimaient déjà dans la notation leibnitzienne les formules intuitives (6). Donc, *quand on prend, avec des axes rectangulaires, l'arc comme variable indépendante, les dérivées premières des trois coordonnées expriment les cosinus directeurs de la tangente; et la condition connue, en vertu de laquelle les carrés de trois cosinus directeurs ont pour somme l'unité, devient une relation simple entre ces trois dérivées.*

On verra bientôt que ces simplifications ne sont pas les seules, et combien le choix de l'arc comme variable facilite en général l'expression des propriétés des courbes gauches. La raison en est uniquement dans ce fait, que la somme $x'^2+y'^2+z'^2$ se réduit alors constamment à l'unité. Il en résulte, par exemple, que la dérivée de $x'^2+y'^2+z'^2$ le long de l'arc, savoir, le double du trinôme $x'x''+y'y''+z'z''$, s'annule identiquement; et l'on peut, en joignant à la dernière relation (8) cette conséquence qu'elle entraine, écrire les deux formules, sou-

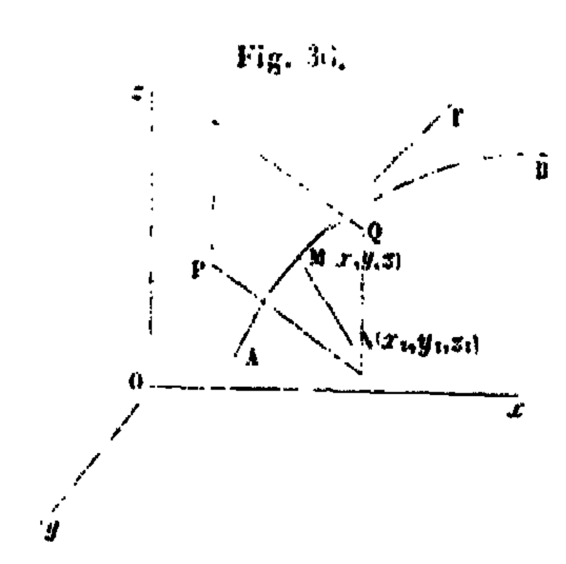
vent utilisées,

$$(9) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

139. — Plan normal.

Si, par le point $M(x, y, z)$ d'une courbe gauche AB, que représenteront en général trois équations de la forme $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, on mène dans tous les sens possibles des *normales*, telles

Fig. 36.



que MN, à cette courbe, on sait que ces perpendiculaires à la tangente MT ont pour lieu géométrique un plan, PQ, perpendiculaire à MT. Ce plan est dit *normal* à la courbe en M.

Formons son équation, d'abord dans l'hypothèse d'axes obliques. Un quelconque, N, de ses points, dont j'appellerai x_1, y_1, z_1 les coordonnées (*coordonnées courantes* du plan), sera caractérisé par ce fait, qu'il se projettera en M sur la tangente MT, ou que la droite MN, le reliant à M, dont les trois projections obliques sur les axes sont $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, aura sa propre projection (normale) sur MT égale à zéro. Or on sait que cette projection de la droite MN sur une autre droite MT dont on appelle $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les cosinus directeurs, est la somme des projections $(x_1 - x)\cos\alpha$, $(y_1 - y)\cos\beta$, $(z_1 - z)\cos\gamma$, sur cette droite, des trois côtés d'une ligne brisée allant de M à N, respectivement parallèles aux axes des x, y, z et égaux à $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$. Donc l'équation du plan normal sera

$$(x_1 - x)\cos\alpha + (y_1 - y)\cos\beta + (z_1 - z)\cos\gamma = 0.$$

Et *si enfin les axes sont rectangles*, elle deviendra, en remplaçant, d'après (7), $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ par les trois dérivées proportionnelles x', y', z',

$$(10) \qquad x'(x_1 - x) + y'(y_1 - y) + z'(z_1 - z) = 0.$$

160. — Du plan osculateur : ses principales propriétés.

Reprenant un système quelconque d'axes Ox, Oy, Oz rectangulaires ou obliques, concevons qu'on fasse passer un plan par trois points de la courbe très voisins, mais d'ailleurs arbitraires, correspondant à trois valeurs peu différentes t, $t+\Delta t$, $t+\Delta' t$ de la variable indépendante, et dont j'appellerai les coordonnées, respectivement, x, y, z; $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$; $x+\Delta' x$, $y+\Delta' y$, $z+\Delta' z$. Il est aisé de voir que ce plan tendra, quels que soient les rapports des distances mutuelles des trois points, vers une position limite parfaitement déterminée, si l'on fait tendre les trois points vers un seul en rendant infiniment petits Δt, $\Delta' t$ et, par suite, Δx, Δy, Δz, $\Delta' x$, $\Delta' y$, $\Delta' z$.

Soient, en effet, x_1, y_1, z_1 les coordonnées courantes d'un plan de direction quelconque mené par (x, y, z), et

$$(11)\qquad A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)=0$$

son équation, où les trois coefficients A, B, C (pris de grandeurs absolues comparables à l'unité) définissent la direction du plan par leurs rapports mutuels, seuls à considérer. Exprimer que ce plan est justement celui qu'on veut mener, ou qui passe par les points $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ et $(x+\Delta' x, y+\Delta' y, z+\Delta' z)$, c'est évidemment écrire que son équation se trouve satisfaite quand x_1-x, y_1-y, z_1-z deviennent soit $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, soit $\Delta' x, \Delta' y, \Delta' z$. Les deux équations déterminant des rapports mutuels de A, B, C seront donc

$$A\,\Delta x+B\,\Delta y+C\,\Delta z=0,\qquad A\,\Delta' x+B\,\Delta' y+C\,\Delta' z=0.$$

On peut les diviser respectivement par Δt, $\Delta' t$, et substituer même ensuite à la seconde sa différence d'avec la première; ce qui donnera

$$(12)\qquad \begin{cases} A\dfrac{\Delta x}{\Delta t}+B\dfrac{\Delta y}{\Delta t}+C\dfrac{\Delta z}{\Delta t}=0,\\ A\left(\dfrac{\Delta' x}{\Delta' t}-\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)+B\left(\dfrac{\Delta' y}{\Delta' t}-\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)+C\left(\dfrac{\Delta' z}{\Delta' t}-\dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right)=0.\end{cases}$$

Or, supposant continues dans la région étudiée les dérivées premières et secondes des fonctions x, y, z de t, développons par la formule de Taylor les petits accroissements $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ et $\Delta' x, \Delta' y, \Delta' z$ de ces fonctions, pour les deux accroissements respectifs Δt, $\Delta' t$ de la variable. Si nous appelons $x', y', z', x'', y'', z''$ les dérivées des deux premiers ordres de x, y, z, prises pour le point (x, y, z) de la courbe ou pour la valeur t, de la variable, à partir de laquelle se comptent les accrois-

sements, nous aurons, sous la forme condensée qui nous est habituelle, en représentant simplement par quelques points des termes complémentaires dont le rapport à $(\Delta t)^2$ ou à $(\Delta' t)^2$ sera nul à la limite,

$$(13)\quad \begin{cases} (\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z) = (x',\ y',\ z')\,\Delta t + (x'',\ y'',\ z'')\,\dfrac{(\Delta t)^2}{2} + \ldots, \\ (\Delta' x,\ \Delta' y,\ \Delta' z) = (x',\ y',\ z')\,\Delta' t + (x'',\ y'',\ z'')\,\dfrac{(\Delta' t)^2}{2} + \ldots \end{cases}$$

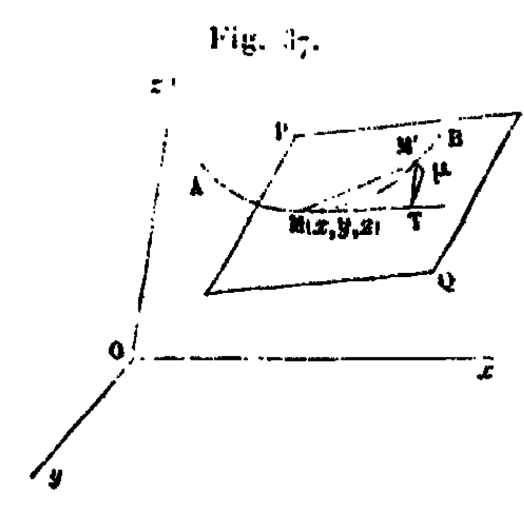
Enfin ces valeurs, portées dans les deux équations (12), les réduiront, après division de la seconde par $\frac{1}{2}(\Delta' t - \Delta t)$ et suppression finale, dans chacune, des termes dont l'ensemble s'évanouit avec Δt et $\Delta' t$, à celles-ci, généralement distinctes l'une de l'autre,

$$(14)\qquad Ax' + By' + Cz' = 0, \qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

Donc le plan en question s'approche bien d'une limite déterminée, la même quel que soit le rapport, constant ou variable, des deux accroissements évanouissants Δt, $\Delta' t$. Rien n'empêche, par exemple, de faire tendre vers zéro l'un de ces deux accroissements, Δt, avant l'autre $\Delta' t$. Alors les deux points (x, y, z), $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ se confondent en un seul, et la corde qui les joint devient une tangente, tandis que le troisième point $(x + \Delta' x,\ y + \Delta' y,\ z + \Delta' z)$ reste encore distinct. Ainsi, *la position limite d'un plan est la même, soit qu'on le mène par trois points de la courbe voisins et qui tendent à se confondre, soit qu'on le mène par deux tels points et suivant la tangente à la courbe en l'un d'eux.*

Or il résulte de là que, *dans le voisinage du point commun, la courbe s'éloigne moins de ce plan limite qu'elle ne ferait de tout*

Fig. 37.



autre. Car, soient : M le point commun, M' un point de la courbe voisin, MT la tangente en M, M'T la distance de M' à cette tangente, produit de la corde MM' par le sinus de l'angle évanouissant TMM'. Pour

qu'un plan soit tel, que la courbe s'en éloigne le moins possible dans le voisinage de M, il doit d'abord évidemment passer par ce point M. Et il faut même de plus qu'il contienne la tangente MT : sans quoi il ferait avec elle un angle fini et, par suite, sensiblement le même angle avec la corde MM', de sorte que la distance de M' au plan, produit de la corde MM' par le sinus de cet angle fini, serait incomparablement supérieur à M'T, alors qu'elle est visiblement moindre pour les plans menés suivant MT. Soit donc PQ un de ces plans (contenant MT), M'μ sa distance à M' et, par suite, M'Tμ l'angle qu'il fait avec le plan MTM' mené suivant la tangente MT et le point M'. Le triangle M'Tμ, rectangle en μ, donnera M'μ = M'T sin M'Tμ. Donc, si le plan PQ n'est pas la limite vers laquelle tend le plan MTM' quand MM' s'évanouit, l'angle M'Tμ, ne s'annulant pas pour MM' = o, aura une valeur sensible; et la distance M'μ du point M' au plan sera de l'ordre de sa distance M'T d'avec la tangente, alors qu'elle deviendrait incomparablement plus faible si sin M'Tμ tendait vers zéro. Par conséquent, le plan dont la courbe s'éloigne le moins aux environs du point M est, comme on voulait le démontrer, la position limite de celui qui passe par la tangente MT et par le point M' tendant vers M.

C'est pourquoi on l'appelle le *plan osculateur* à la courbe en M. Il est (autant que possible) pour la ligne gauche, près du point de contact M, ce qu'est le propre plan d'une courbe plane pour cette courbe, savoir, celui dans lequel tourne la tangente aux environs de M. Menons en effet la tangente au point M', que nous supposerons avoir été d'abord confondu avec M, mais s'en être éloigné très peu, et appelons $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ les coordonnées de M'. D'après les formules (2) [p. 231], la direction de la tangente sera définie par les dérivées premières de ces coordonnées, dérivées égalant leurs valeurs x', y', z' relatives au point M accrues de petites différences, $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, dont les rapports à l'accroissement simultané Δt de la variable entre M et M' sont à fort peu près les dérivées secondes x'', y'', z'' pour le point M. Nous verrons plus facilement comment tourne cette tangente en lui menant par le point fixe M une parallèle, dont la rotation fera juger de la sienne. Or, si x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées courantes de la parallèle ainsi tirée, sa direction sera définie, comme on sait, par les trois différences x_1-x, y_1-y, z_1-z, en même temps que par les trois dérivées $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ ou, sensiblement, $x'+x''\Delta t$, $y'+y''\Delta t$, $z'+z''\Delta t$, que l'on vient d'évaluer. Et ses équations s'écriront

$$(15) \qquad \frac{x_1-x}{x'+x''\Delta t}=\frac{y_1-y}{y'+y''\Delta t}=\frac{z_1-z}{z'+z''\Delta t}.$$

Or, avec ces équations très approchées, qui tiennent compte (à des erreurs relatives près évanouissantes) du changement de direction de la tangente près de M, la parallèle en question est située et tourne bien dans le plan osculateur. Car les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un quelconque de ses points, ayant leurs excédents sur x, y, z proportionnels aux trois dénominateurs de (15), changent l'équation (11) du plan en celle-ci,

$$A(x' + x''\Delta t) + B(y' + y''\Delta t) + C(z' + z''\Delta t) = 0,$$

vérifiée identiquement d'après les conditions (14) déterminant les rapports mutuels de A, B, C.

On voit, par cette démonstration, que le plan osculateur contient non seulement la tangente à la courbe en son point de contact avec elle, mais aussi une parallèle à une tangente différant infiniment peu de celle-là en direction, c'est-à-dire menée à la courbe en un point infiniment voisin; et l'on peut dire que *le plan osculateur est encore la limite des plans menés suivant une tangente et parallèlement à une autre tangente, quand celle-ci se rapproche indéfiniment de la première*.

Enfin, l'écart M'μ, sur la figure précédente, de la courbe d'avec son plan osculateur en M, étant incomparablement plus petit que celui M'T du même point M' d'avec la tangente MT, se trouve atteindre un ordre de petitesse supérieur au second et, par conséquent, en général, le troisième, par rapport à la distance M'M où l'on est du point de contact; car on a vu (p. 232) que l'écart M'T d'avec la tangente est du second ordre, quand les deux projections de la courbe sur les deux plans des xy et des xz ont leur courbure finie. Donc *le contact d'une courbe gauche avec son plan osculateur est généralement du second ordre*.

On aurait pu le déduire directement de la manière même dont le plan osculateur a été obtenu, savoir, comme limite des positions d'un plan mobile mené suivant trois points de la courbe voisins. En effet, la projection (orthogonale) de la courbe gauche sur le plan mobile passe par ces trois points; d'où il suit que les propres projections (obliques), sur les plans des xy et des xz, de cette projection coupent les projections analogues de la courbe gauche aux endroits où s'y projettent ces trois mêmes points. Or, à la limite, les triples intersections ainsi produites dans les plans des xy et des xz deviennent, comme on sait, un contact du second ordre; et la projection (orthogonale) de la courbe gauche sur son plan osculateur a par conséquent, en projection sur les plans des xy et des xz, un contact du second ordre

avec cette courbe gauche. D'après le principe presque évident démontré à la fin du n° 156 (p. 233), elle aura donc également avec elle un contact du même ordre dans l'espace; ce qui revient à dire que les distances de la courbe gauche au plan, près de M, seront d'un ordre de petitesse supérieur au second et, généralement, du troisième.

161. — Équation de ce plan.

Pour former l'équation du plan osculateur, il suffit de déduire des relations (14), qui, divisées par C, sont deux équations du premier degré en $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, les rapports mutuels de A, B, C, et puis de substituer ces rapports à A, B, C dans (11). En procédant ainsi, l'on trouve d'abord

$$\frac{A}{C} = \frac{y'z'' - z'y''}{x'y'' - y'x''}, \qquad \frac{B}{C} = \frac{z'x'' - x'z''}{x'y'' - y'x''},$$

ce qui revient à poser la double proportion

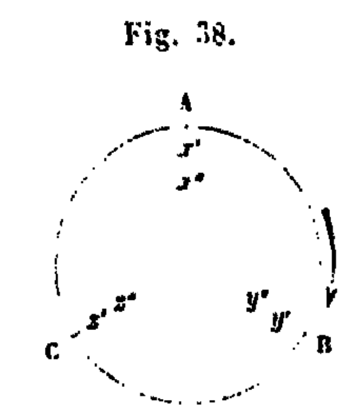
$$(16) \qquad \frac{A}{y'z'' - z'y''} = \frac{B}{z'x'' - x'z''} = \frac{C}{x'y'' - y'x''};$$

et la substitution à A, B, C, dans (11), des binômes proportionnels figurant en dénominateur, donne enfin l'équation cherchée du plan

$$(17) \qquad \begin{cases} (y'z'' - z'y'')(x_1 - x) + (z'x'' - x'z'')(y_1 - y) \\ \qquad + (x'y'' - y'x'')(z_1 - z) = 0. \end{cases}$$

On saisit facilement le genre de symétrie de ces formules (16) et (17) au moyen de ce qu'on appelle les *permutations circulaires* ou *permutations tournantes* effectuées sur des lettres analogues. Divisons un cercle en un certain nombre de parties égales, savoir, dans le cas actuel, en trois parties; puis écrivons, près des points de division successifs, les trois lettres A, B, C (qui désignent des quantités analogues), suivant leur ordre convenu; et, de même, les lettres *analogues* x', y', z' et x'', y'', z''. On effectuera une permutation circulaire ou tournante sur certaines lettres, lorsqu'on remplacera, dans une formule, chacune des lettres ainsi inscrites par la lettre analogue qui vient après sur le cercle, et que l'on rencontre en faisant le tour de ce dernier dans le sens de la flèche. Par exemple, une permutation circulaire effectuée sur A, donne B; sur B, elle donnerait C, et, sur C, elle donnerait A; etc.

Fig. 38.



Cela entendu, opérons une permutation circulaire sur le premier des rapports (16), et nous aurons le second; de même, une permutation circulaire effectuée sur le second donne le troisième; etc. Donc, il suffit de se rappeler un seul des rapports (16), pour en déduire les deux autres par une ou par deux permutations tournantes effectuées sur son expression. Chaque terme du premier membre de (17) se déduit de même du précédent par une permutation tournante effectuée sur toutes ses lettres.

162. — Normale principale et binormale.

On appelle *normale principale* à une courbe, en un point, l'intersection du plan normal et du plan osculateur menés au même point : c'est, en d'autres termes, celle d'entre les normales qui se trouve dans le plan osculateur et qui, par conséquent, deviendrait la normale ordinaire si la courbe était plane.

Les équations de la normale principale seront donc les équations mêmes, (10) et (11), des deux plans normal et osculateur. La première, (10), suppose la rectangularité des axes; en sorte que nous devrons nous borner à cette hypothèse. Et, pour arriver à une forme très simple du système ainsi formé par (10) et (11), nous supposerons de plus l'arc s de la courbe choisi comme variable indépendante. Alors les équations (10) et (11), qui déterminent complètement les rapports mutuels des différences $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, seront satisfaites par la substitution, à ces différences, des trois dérivées x'', y'', z'', qui les transformera respectivement en la seconde (9) et la seconde (14). Donc ces relations (10) et (11) reviennent, avec la variable s choisie, à la double proportion

$$(18)\qquad \frac{x_1 - x}{x''} = \frac{y_1 - y}{y''} = \frac{z_1 - z}{z''}.$$

Telles sont les deux équations, aussi réduites que possible, de la normale principale.

La perpendiculaire menée au plan osculateur par son point (x, y, z) de contact, se trouvant à angle droit sur les directions, que comprend ce plan, de *deux* éléments successifs de la courbe, est, en réalité, *doublement* normale : aussi a-t-elle reçu le nom de *binormale*. Que les axes soient, ou non, rectangulaires, ses cosinus directeurs sont, d'après l'équation (11) du plan osculateur, proportionnels aux coefficients A, B, C de $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$: car, si l'on conçoit une droite qui ait ses cosinus directeurs représentés en effet proportionnellement par A, B, C, chose qu'on sait être toujours possible, et si on l'appelle, pour abréger,

la droite ou la direction (A, B, C), les trois projections (obliques) $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, sur les axes, de la droite qui joint le point (x, y, z) à tout autre point (x_1, y_1, z_1) du plan dont il s'agit, multipliées respectivement par A, B, C et ajoutées, représenteront de même proportionnellement la projection normale de cette droite du plan sur la direction (A, B, C). Or l'équation (11) montre que la projection ainsi obtenue est nulle, ou que cette direction (A, B, C) est perpendiculaire à la droite quelconque considérée du plan; ce qui implique bien la normalité de la direction dont il s'agit, au plan lui-même.

Cela posé, formons, dans l'hypothèse d'axes rectangles, les équations de la binormale, dont nous appellerons x_1, y_1, z_1 les coordonnées courantes. Il est clair que les projections (alors normales) sur les axes, $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, de sa partie allant de (x, y, z) à (x_1, y_1, z_1), égaleront les produits de cette partie par les trois cosinus correspondants, proportionnels à A, B, C ou, par suite, aux trois dénominateurs des fractions (16). Les équations de la binormale seront donc

(19) $$\frac{x_1 - x}{y' z'' - z' y''} = \frac{y_1 - y}{z' x'' - x' z''} = \frac{z_1 - z}{x' y'' - y' x''}.$$

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

SUITE DE L'ÉTUDE DES COURBES GAUCHES : CERCLE OSCULATEUR; COURBURE ET * CAMBRURE.

163. — Du cercle osculateur à une courbe gauche.

Poursuivons l'idée qui nous a conduit à la notion du plan osculateur, ou, autrement dit, considérons sur la courbe trois points voisins quelconques,

$$(x, y, z), \quad (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z), \quad (x + \Delta' x, y + \Delta' y, z + \Delta' z),$$

tendant à se confondre en un seul M; mais, après avoir mené le plan de ces trois points, traçons le cercle, parfaitement déterminé, qui les contient tous les trois, en même temps, si l'on veut, que la projection orthogonale déjà considérée de la courbe sur le plan, et toute autre ligne (plane ou gauche) définie, passant par les trois points. A la limite, ces diverses lignes auront avec la courbe proposée un contact du second ordre, puisque leurs deux projections obliques sur les plans des xy et des xz en offriront à la fois un de cet ordre, produit par la réunion des trois points d'intersection voisins.

Et l'on obtiendra bien ainsi toutes les lignes possibles qui ont avec la proposée, au point M, un contact du second ordre, caractérisé (p. 233), en projection sur les deux plans des xy et des xz, par des écarts mutuels du troisième ordre de petitesse dans le voisinage. Autrement dit, une telle ligne pourra toujours être supposée la limite d'une courbe variable qui présenterait avec la proposée, pour les abscisses respectives x, $x + \Delta x$, $x + \Delta' x$, trois intersections tendant à se confondre. Car nous savons que ses projections sur les plans des xy et des xz, par le fait même qu'elles offriront des contacts du second ordre avec les projections analogues de la proposée, seront, dans leurs plans respectifs, les limites de lignes variables, ayant séparément avec ces projections trois points communs, dont les abscisses se trouveront arbitraires (p. 187) pourvu qu'elles tendent vers la limite unique assignée. On pourra donc attribuer à

ces abscisses les valeurs x, $x+\Delta x$, $x+\Delta' x$ pareilles sur les deux plans des xy et des xz, afin que les deux lignes variables de ces plans considérées ainsi soient bien les deux projections d'une même ligne de l'espace ayant ses trois points d'abscisses x, $x+\Delta x$, $x+\Delta' x$ communs avec la courbe proposée, et qui tende en même temps vers la ligne fixe voulue.

Mais revenons, en particulier, au cercle passant par les trois points voisins dont il s'agit,

$$(x, y, z), \quad (x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z), \quad (x+\Delta' x, y+\Delta' y, z+\Delta' z).$$

A la limite, ce cercle, alors situé sur le plan osculateur, se trouvera parfaitement défini; car son plan étant déterminé, ainsi que la direction et la courbure de ses deux projections obliques sur les deux plans des xy et des xz aux endroits où se projette obliquement le point de contact, cela revient à se donner, outre sa tangente en ce point, la grandeur avec le sens de son rayon dont dépendent les courbures de ses deux projections. Et il sera le cercle osculateur commun de toutes les courbes dont il a été question. En effet, un cercle différent passant par M ne pourrait avoir un contact du même ordre avec l'une quelconque de ces courbes sans en avoir un aussi du second ordre avec lui, l'écart mutuel de ces deux cercles, mesuré dans un plan parallèle aux yz, étant évidemment inférieur à la somme de leurs écarts respectifs, dans le même plan, d'avec la courbe supposée en contact du second ordre avec chacun d'eux. Or deux circonférences qui, aux environs d'un point commun M, ne s'écartent l'une de l'autre que de quantités d'un ordre de petitesse supérieur au second, ne sauraient être dans deux plans différents; car chacune d'elles présenterait, comme toute courbe, des écarts au moins du second ordre avec un plan qui ne serait pas son plan osculateur et, par suite, avec toute courbe tracée dans un tel plan. Ainsi, les deux circonférences auraient, dans un même plan, un contact du second ordre; ce qu'on sait, par la théorie du cercle osculateur aux courbes planes, être impossible à moins qu'elles ne se confondent. C'est dire que le cercle limite obtenu, en contact du second ordre tant avec la courbe proposée qu'avec sa projection sur le plan osculateur et avec les autres lignes indiquées, est, de tous les cercles possibles, celui qui, près du point M, s'éloigne le moins de chacune en particulier de ces courbes. Autrement dit, il constitue bien leur cercle osculateur.

Il reste à voir, pour déterminer le centre et le rayon du cercle osculateur, quelle est, au point de vue analytique, la liaison mutuelle de ce cercle et des autres lignes, en contact réciproque du second ordre.

A cet effet, considérons-les, non pas, tout de suite, dans leurs positions limites, mais alors qu'elles passent par les trois points voisins (x, y, z), $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, $(x - \Delta' x, y - \Delta' y, z - \Delta' z)$; et supposons-les décrites toutes à la fois, d'un mouvement continu, par des mobiles qui arriveraient ensemble en chacun des trois points donnés, aux époques respectives t, $t + \Delta t$, $t - \Delta' t$. Ce mouvement pourra être, par exemple, tel, que les mobiles se trouvent constamment dans un plan parallèle aux yz ou aient leur abscisse x commune; en sorte que leurs distances soient ces écarts mutuels des courbes, que nous venons de considérer. Formons, dans chaque courbe, les expressions (13) [p. 237] de Δx, Δy, Δz, $\Delta' x$, $\Delta' y$, $\Delta' z$, et puis, après les avoir divisées respectivement par Δt et $\Delta' t$, celles des différences $\frac{\Delta' x}{\Delta' t} - \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta' y}{\Delta' t} - \frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta' z}{\Delta' t} - \frac{\Delta z}{\Delta t}$, qui seront $(x'' + \ldots)\frac{\Delta' t - \Delta t}{2}$, etc. Les rapports $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{2}{\Delta' t - \Delta t}\left(\frac{\Delta' x}{\Delta' t} - \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$, ... étant communs à toutes les courbes, leurs limites x', x'', ... y seront les mêmes; et, par conséquent, *dans les courbes en contact du second ordre, les trois fonctions x, y, z de t auront, au point commun (x, y, z), non seulement mêmes valeurs, mais aussi mêmes dérivées premières et secondes.*

D'ailleurs, en attribuant à x', y', z', x'', y'', z'', dans les trois premières formules (13), ces valeurs communes à toutes les courbes données, et en y faisant varier Δt à partir de zéro, pour que Δx, Δy, Δz soient les variations simultanées des coordonnées le long d'un petit arc quelconque d'une des courbes, on voit que, dans toutes, ces variations à un même moment ne différeront que par les termes non écrits, dont l'ordre de petitesse est supérieur au second; de sorte que les écarts mutuels des mobiles décrivant à la fois les courbes et, par suite, les écarts mêmes de ces dernières, n'atteindront pas le second ordre. Autrement dit, le contact entre les courbes est bien de cet ordre dès que x, y, z, avec leurs dérivées premières et secondes, ont valeurs communes au point donné.

Ces conditions analytiques, ainsi prouvées suffisantes pour qu'un contact soit du second ordre, reviennent à dire que l'on pourra attribuer aux courbes deux points communs infiniment voisins et, en ces points, mêmes tangentes ou mêmes plans normaux. Car la connaissance de la tangente en un premier point (x, y, z) équivaut à s'y donner les dérivées x', y', z', et celle de la tangente en un point voisin, dont les coordonnées prendront à la limite, en tenant compte de leurs petits excédents sur x, y, z, les formes $x + x'dt$, $y + y'dt$, $z + z'dt$, équivaut à s'y donner de même les dérivées premières des

coordonnées, dérivées pareillement réductibles à $x' + x''dt$, $y' + y''dt$, $z' + z''dt$, ou impliquant la connaissance de x'', y'', z'' au point (x, y, z), vu le rôle des petits changements de direction exprimés par $x''dt$, $y''dt$, $z''dt$, non moins essentiel que celui des petits changements simultanés de situation $x'dt$, $y'dt$, $z'dt$. Et le plan osculateur en (x, y, z), que détermine la tangente en ce point avec une parallèle à la tangente voisine, se trouvera également le même pour toutes les lignes considérées. Or, dans le cercle, le centre est à l'intersection des deux plans normaux et du plan osculateur qui lui sont communs avec les autres lignes, notamment avec la courbe gauche proposée. Donc, comme ce plan osculateur et le premier plan normal se coupent suivant la normale principale correspondante, on pourra énoncer le principe suivant :

Le centre du cercle osculateur d'une courbe gauche, pour un point donné, se trouve à l'intersection de la normale principale en ce point par un plan normal infiniment voisin, c'est-à-dire à la position limite du point où cette normale principale perce un plan normal qui se rapproche d'elle indéfiniment.

164. — Coordonnées du centre et rayon de ce cercle.

Ce principe conduit aisément à l'expression des coordonnées, que j'appellerai x_1, y_1, z_1, du centre du cercle osculateur pour le point (x, y, z) de la courbe gauche proposée. Supposons les axes rectangulaires, et prenons l'arc s de la courbe pour variable indépendante, afin que les équations de la normale principale se réduisent à (18) [p. 241]. Le plan normal qui la contient aura l'équation (10) [p. 235] et, le plan normal voisin, la même équation, où seulement x, y, z et x', y', z' se trouveront accrus de leurs différentielles $x'dt$, $y'dt$, $z'dt$ et $x''dt$, $y''dt$, $z''dt$. Or, comme il s'agit de considérer un point commun aux deux plans normaux, ou que x_1, y_1, z_1 seront les mêmes dans les deux, l'équation du second peut être remplacée par sa différence d'avec celle du premier, différence divisible par dt ; ce qui donnera, comme premier membre de la nouvelle équation, la dérivée du premier membre de (10) le long de l'arc ds obtenue en traitant x_1, y_1, z_1 comme des constantes. Cette dérivée se forme sans difficulté ; car, par exemple, pour le premier terme $x'(x_1 - x)$, dont les facteurs x' et $x_1 - x$ ont respectivement pour dérivées x'' et $-x'$, elle est $x''(x_1 - x) - x'^2$. En observant que la somme de $-x'^2$, $-y'^2$ et $-z'^2$ vaudra ici -1 d'après la première (9) [p. 235] et en faisant passer ce terme -1 dans le second membre, nul jusque-là, l'équation substituée ainsi à celle du

second plan normal, et qui devra être jointe aux deux (18) de la normale principale, sera

$$(20) \qquad x''(x_1 - x) + y''(y_1 - y) + z''(z_1 - z) = 1.$$

Or, si nous ajoutons terme à terme les trois rapports (18) après les avoir multipliés respectivement *haut et bas* par x'', y'', z'', nous formerons le nouveau rapport égal

$$\frac{x''(x_1 - x) + y''(y_1 - y) + z''(z_1 - z)}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Nous pourrons évidemment, en même temps que nous égalerons celui-ci aux autres, substituer à son numérateur la valeur 1 tirée de (20), et exprimer par le fait même, dans l'égalité multiple ainsi obtenue, que ce numérateur vaut bien effectivement l'unité, ou que l'équation (20) est vérifiée. Nous sommes donc libre de remplacer l'ensemble de l'équation (20) et des deux proportions (18) par la triple proportion

$$(21) \qquad \frac{x_1 - x}{x''} = \frac{y_1 - y}{y''} = \frac{z_1 - z}{z''} = \frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2};$$

et la comparaison de chacun des trois premiers rapports au quatrième donne enfin les coordonnées cherchées x_1, y_1, z_1 du centre du cercle ou plutôt, ce qui revient au même, leurs excédents sur celles, x, y, z, du point de contact,

$$(22) \qquad (x_1 - x,\ y_1 - y,\ z_1 - z) = \frac{(x'',\ y'',\ z'')}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Ces trois différences $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ sont les trois projections, sur les axes, de la droite joignant le point de contact (x, y, z) au centre (x_1, y_1, z_1), c'est-à-dire du rayon même du cercle osculateur, rayon que j'appellerai R comme dans l'étude des courbes planes, mais que je prendrai en valeur absolue. Il égalera évidemment la racine carrée de la somme des carrés des seconds membres de (22). Son expression sera donc, après une réduction évidente,

$$(23) \qquad R = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}};$$

et, dès lors, l'introduction de R^2 en facteur, à la place du dénominateur commun $x''^2 + y''^2 + z''^2$, permettra de donner aux relations (22) la forme, aussi simple que possible,

$$(24) \qquad x_1 - x = R^2 x'', \qquad y_1 - y = R^2 y'', \qquad z_1 - z = R^2 z''.$$

Telles sont les formules qui, exprimant, pour le cercle osculateur

d'une courbe gauche, le rayon R émané du point de contact et ses trois projections sur les axes, permettraient d'en construire le centre dans l'espace et de tracer ensuite ce cercle dans le plan osculateur. On n'oubliera pas qu'elles doivent leur extrême simplicité au choix de l'arc comme variable indépendante, et que, si l'on avait à la place une autre variable quelconque t, ou si le symbole $\frac{d}{ds}$ devait être remplacé par $\frac{1}{s'}\frac{d}{dt}$, les dérivées x'', y'', z'' deviendraient

$$\frac{1}{s'}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{s'}\frac{dx}{dt}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{s'}\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{s'}\right) = \frac{s'^2x'' - x's's''}{s'^4}, \quad \text{etc.},$$

avec l'expression suivante du carré de la dérivée de l'arc,

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$

d'où résulte, en différentiant, pour le produit $s's''$ lui-même, la valeur

$$s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z''.$$

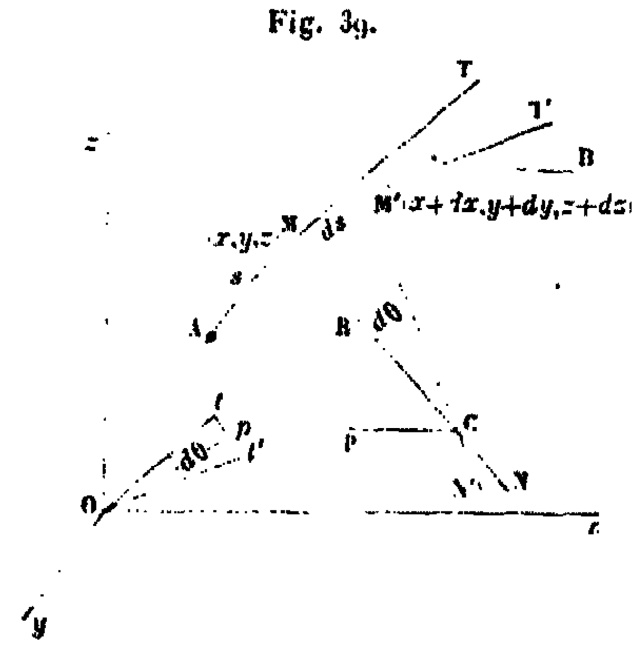
165*. — Cosinus directeurs de la normale principale et de la binormale.

(Compléments, p. 210*.)

166. — Angle de contingence; son calcul par la considération des normales.

Soient MM' un arc infiniment petit ds de la courbe gauche proposée

Fig. 39.



AB, et MCN, M'CN' les traces de deux plans normaux consécutifs PCM, PCM' sur le plan mené par la tangente MT en M et le point

voisin M'. Ce plan, presque confondu avec le plan osculateur construit suivant MT, qui est sa limite, coupera l'intersection CP des deux plans normaux en un point C infiniment proche de celui où la couperait le plan osculateur et, par suite, infiniment voisin aussi du centre (x_1, y_1, z_1) du cercle osculateur. On pourra donc prendre C pour ce centre et MC pour le rayon R du cercle. De plus, le plan TMCM' sera encore infiniment voisin en direction de celui, dont la limite est également le plan osculateur en M, qui contiendrait la tangente MT avec une parallèle à la tangente voisine M'T', et qui, ainsi perpendiculaire aux deux faces de l'angle dièdre MCPM', le couperait suivant son angle rectiligne. Ce dernier est donc la projection de MCM' sous un angle infiniment petit et a avec MCM' un rapport tendant vers l'unité; ce qui revient à dire que l'angle MCM' peut être pris pour la mesure du changement de direction éprouvé par le plan normal le long de l'arc élémentaire intercepté MM' ou ds. Le même changement est encore évalué par l'angle de deux droites, Ot, Ot', tirées, à partir d'un même point de l'espace, l'origine O par exemple, perpendiculairement aux deux plans normaux considérés, ou parallèlement aux deux tangentes MT, M'T'; car on sait qu'un pareil angle tOt', formé dans un plan perpendiculaire à l'arête CP du dièdre MCPM', a ses côtés perpendiculaires à ceux du rectiligne suivant lequel ce dièdre se trouve coupé par le même plan, et qu'il est par suite son égal, ne pouvant (vu leur valeur infiniment petite) être son supplémentaire.

L'angle tOt', dont les côtés sont respectivement parallèles aux deux tangentes consécutives MT, M'T', et l'angle MCM', qu'on peut regarder comme formé par la normale principale en M et par une normale la joignant à partir du point voisin M', mesurent donc le changement commun de direction soit de la tangente, soit du plan normal, le long de l'arc infiniment petit MM' ou ds. Ils sont ce qu'on appelle, comme dans le cas plus simple de deux tangentes ou normales consécutives d'une courbe plane, l'*angle de contingence :* nous le représenterons toujours par $d\theta$.

Connaissant déjà le rayon MC = R du cercle osculateur, évaluons d'abord $d\theta$ au moyen du triangle MCM', analogue à celui de la page 199. La proportion des sinus y donnera de même, évidemment,

$$(29) \qquad \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$$

et, par suite, en substituant finalement à R sa valeur (23),

$$(30) \qquad d\theta = \frac{ds}{R} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}\, ds$$

167*. — Calcul de l'angle de deux droites voisines, définies par leurs cosinus directeurs.

(Compléments, p. 212*.)

168*. — Angle de contingence, calculé par les tangentes.

(Compléments, p. 213*.)

169. — Courbure d'une courbe gauche.

Il est naturel, pour une ligne gauche comme pour une ligne plane, d'appeler *courbure* en un point le changement de direction, $d\theta$, qu'éprouve la tangente ou le plan normal sur une longueur infiniment petite ds, rapporté à l'unité de longueur, c'est-à-dire divisé par ce chemin infiniment petit ds le long duquel il se produit. La courbure sera donc encore le quotient de l'angle de contingence $d\theta$ par l'arc élémentaire correspondant ds; et la formule (30) donnera

$$\text{courbure ou } \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}. \tag{33}$$

La courbure est donc exprimée, pour les courbes gauches comme pour les courbes planes, par l'inverse du rayon du cercle osculateur. Aussi ce cercle s'appelle-t-il encore *cercle de courbure;* son centre, *centre de courbure*, et son rayon, *rayon de courbure*.

170*. — Angle de torsion d'un arc infiniment petit de courbe gauche.

(Compléments, p. 213*.)

171*. — De la cambrure en un point d'une courbe gauche.

(Compléments, p. 215*.)

172*. — Comment toute courbe gauche peut se déduire, par torsion, d'une courbe plane.

(Compléments, p. 216*.)

DIX-HUITIÈME LEÇON.

DES SURFACES COURBES; PLAN TANGENT ET * POINTS SINGULIERS; NORMALE; * LIGNES DE PENTE.

173. — Plan tangent à une surface.

D'après ce qu'on a vu au n° 41 (p. 94) et plus complètement au n° 42* (dans le Fascicule II, p. 49*), toute surface dont l'équation en coordonnées rectilignes est de la forme $F(x, y, z) =$ une const. c. avec un premier membre fonction continue de x, y, z et à dérivées premières continues, admet généralement, en chacun (x, y, z) de ses points, un plan *tangent*, dont elle s'écarte, à une petite distance tout autour du *point de contact* (x, y, z), de quantités comparables au carré de cette distance, et qui est le lieu des tangentes menées, au même point, à toutes les courbes s'y croisant sur la surface. Il n'y a d'exception que pour les points, dits *singuliers*, propres à certaines de ces surfaces, et où s'annulent à la fois les trois dérivées partielles de F en x, y, z.

Si l'équation de la surface a été résolue par rapport à z, ou mise sous la forme $z = f(x, y)$, et que p, q désignent les deux dérivées partielles en x et en y de l'ordonnée $z = f(x, y)$, nous avons trouvé (p. 95) comme équation du plan tangent, avec x_1, y_1, z_1 pour coordonnées courantes,

$$z_1 - z = p(x_1 - x) + q(y_1 - y). \tag{1}$$

Mais, quand l'équation de la surface est, plus généralement, $F(x, y, z) = c$, on a obtenu pour celle du plan tangent (dans le Fascicule II, p. 49*) et l'on trouve, d'ailleurs, de suite, en portant dans (1) les valeurs de p et q qu'a données, au n° 66 (p. 120), la différentiation de $F(x, y, z) = c$,

$$\frac{dF}{dx}(x_1 - x) + \frac{dF}{dy}(y_1 - y) + \frac{dF}{dz}(z_1 - z) = 0. \tag{2}$$

Par exemple, une surface du second degré rapportée à son centre et

à trois demi-diamètres conjugués ayant son équation de la forme

$$(3)\qquad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1,$$

avec trois constantes positives ou négatives A, B, C, les dérivées partielles du premier membre $F(x, y, z)$, après division par le facteur commun 2, y sont $\frac{x}{A}, \frac{y}{B}, \frac{z}{C}$; et l'équation (2) du plan tangent y devient

$$\frac{x(x_1-x)}{A}+\frac{y(y_1-y)}{B}+\frac{z(z_1-z)}{C}=0$$

ou

$$\frac{xx_1}{A}+\frac{yy_1}{B}+\frac{zz_1}{C}=\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}.$$

Remplaçons le second membre par sa valeur 1 tirée de (3); et cette équation du plan tangent à une surface du second degré prendra la forme, parfaitement symétrique en x et x_1, y et y_1, z et z_1,

$$(4)\qquad \frac{xx_1}{A}+\frac{yy_1}{B}+\frac{zz_1}{C}=1.$$

On remarquera qu'elle n'est pas moins du premier degré par rapport aux coordonnées x, y, z du point de contact que par rapport aux coordonnées courantes x_1, y_1, z_1.

Enfin on peut, comme il a été expliqué à la fin du n° 7 (p. 23), voir dans une surface le lieu de la famille des courbes décrites par les différents points d'une même ligne, qui, d'un instant t à l'autre, se déplace en se déformant d'une certaine manière. Les coordonnées x, y, z sont alors fonction, le long de chaque courbe, de la variable indépendante t, mais, d'une courbe à l'autre et pour même valeur de t, d'un paramètre α, numéro d'ordre, en quelque sorte, des divers points de la ligne génératrice; et l'on a, pour représenter la surface, trois équations de la même forme $x=f_1(t, \alpha)$, $y=f_2(t, \alpha)$, $z=f_3(t, \alpha)$. Les positions successives de la ligne génératrice constituent d'ailleurs, sur la surface, une seconde famille de courbes, qui croisent les premières et qui ont α pour variable (le long de chaque courbe), t pour paramètre.

Comme les deux relations $x=f_1(t, \alpha)$, $y=f_2(t, \alpha)$ déterminent t et α en fonction de x et de y, et que, par suite, z ou $f_3(t, \alpha)$ devient une fonction composée de x et de y par l'intermédiaire de t et de α, on exprimerait aisément les dérivées en x et y de t, α et, par suite, z, au moyen des dérivées immédiatement évaluables de f_1, f_2 et f_3, ou

x, y et z, en t et α. Enfin, la substitution, dans l'équation précédente (1), des valeurs ainsi trouvées pour les dérivées p et q de z par rapport à x et à y, donnerait l'équation du plan tangent.

Mais celle-ci, qu'on peut toujours écrire provisoirement, avec trois coefficients indéterminés A, B, C,

$$(5)\qquad A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)=0,$$

s'obtient d'une manière moins abstraite, en observant que le plan tangent en (x, y, z) contient la tangente aux deux courbes $\alpha=$ const. et $t=$ const. qu'on y mènerait, ou bien, pour chacune, un élément ds, ayant ses projections obliques dx, dy, dz exprimées respectivement, sous forme abrégée, par $\frac{d(x, y, z)}{dt}dt$ et par $\frac{d(x, y, z)}{d\alpha}d\alpha$. On peut donc, dans (5), substituer à x_1-x, y_1-y, z_1-z ces deux systèmes de valeurs de dx, dy, dz; ce qui, après suppression du facteur commun dt ou $d\alpha$, donne les deux relations

$$(6)\qquad A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0,\qquad A\frac{dx}{d\alpha}+B\frac{dy}{d\alpha}+C\frac{dz}{d\alpha}=0.$$

Et il en résulte pour A, B, C les trois valeurs *proportionnelles*, à substituer dans (5),

$$(7)\qquad \begin{cases} A=\frac{dy}{dt}\frac{dz}{d\alpha}-\frac{dz}{dt}\frac{dy}{d\alpha}, \\ B=\frac{dz}{dt}\frac{dx}{d\alpha}-\frac{dx}{dt}\frac{dz}{d\alpha}, \\ C=\frac{dx}{dt}\frac{dy}{d\alpha}-\frac{dy}{dt}\frac{dx}{d\alpha}. \end{cases}$$

Grâce à ces valeurs, le plan exprimé par l'équation (5) contiendra bien la tangente en (x, y, z) à toute courbe y passant sur la surface, ou, ce qui revient au même, l'élément ds obtenu en y faisant croître t et α de quantités infiniment petites quelconques dt et $d\alpha$. Car les projections obliques, dx, dy, dz, de ds sur les axes seront exprimées par $\frac{d(x, y, z)}{dt}dt+\frac{d(x, y, z)}{d\alpha}d\alpha$; et, mises dans (5) à la place de x_1-x, y_1-y, z_1-z, elles vérifieront identiquement cette équation, vu les valeurs (7) de A, B, C ou les relations (6).

174*. — Coup d'œil sur les points singuliers des surfaces courbes : points isolés et points coniques.

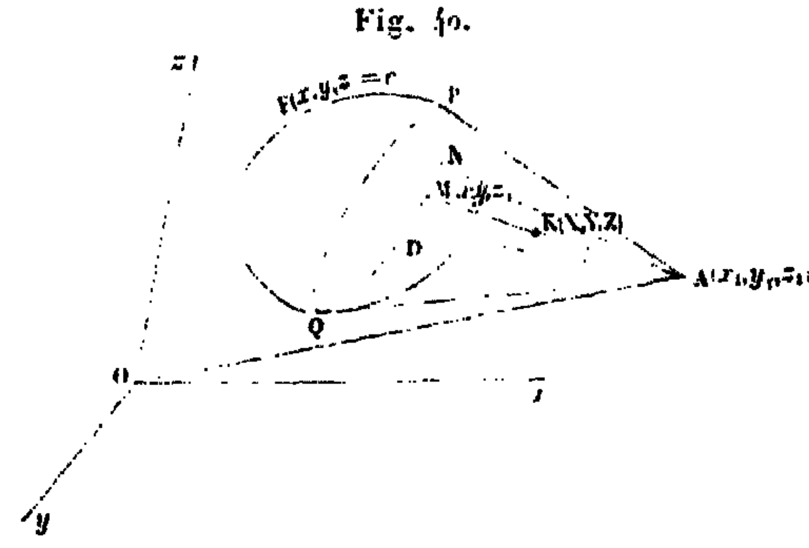
(Compléments, p. 119*).

173. — Plans tangents passant par un point donné ou parallèles à une droite donnée.

Supposons qu'on demande de mener à une surface, dont l'équation connue est de la forme $F(x, y, z) = c$, les plans tangents passant par un point donné $A(x_1, y_1, z_1)$, ou tels, que les coordonnées x_1, y_1, z_1 de ce point satisfassent à la relation (2) [p. 251]. Il faudra exprimer que les points de contact $M(x, y, z)$ vérifient : 1° l'équation $F = c$ de la surface; 2° la relation (2), où l'on aura mis pour x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point donné A, et dans laquelle les inconnues ou les variables seront par suite x, y, z. Cette relation devenant alors, c'est-à-dire avec x, y, z pour coordonnées courantes, l'équation d'une certaine surface, le lieu des points cherchés (x, y, z) sera la courbe MPQ d'intersection de cette surface et de la proposée $F = c$: on l'appelle la *courbe de contact*.

S'il s'agit, par exemple, d'une surface du second degré, l'équation (2), devenue (4) [p. 252], sera du premier degré en x, y, z et représentera alors un certain plan dont l'intersection par la surface (3) donnera une simple conique pour courbe de contact. Ce *plan de contact* est appelé *plan polaire* du point A, par rapport à la surface du second

Fig. 40.



degré $F = c$; et le point $A(x_1, y_1, z_1)$ est dit lui-même le *pôle* du plan. Les plans polaires et les pôles, de même que les droites analogues (ou *polaires*) et les points analogues dans les courbes du second degré, jouissent de belles propriétés, tenant, d'une part, à ce que x, y, z et x_1, y_1, z_1 entrent de la même manière ou peuvent échanger leurs rôles dans (4), d'autre part, à ce que cette équation (4) devient celle-même, (3), de la surface quand on y prend x_1, y_1 et z_1 égaux à x, y et z.

Mais revenons au cas d'une surface quelconque et menons dans les plans tangents, à partir de leurs points de contact $M(x, y, z)$, les tangentes MA aboutissant au point A. Le plan de deux consécutives, AM et AN par exemple, de ces tangentes, contiendra outre MA, à partir de M, la corde infiniment petite MN assimilable évidemment à une tangente; et, par suite, ces deux droites MA, MN, de directions *sensiblement* différentes (même à la limite où la longueur MN s'annule), ne cesseront pas de le déterminer, à cette limite où il se trouvera mené ainsi suivant deux tangentes distinctes émanées de M et deviendra le plan tangent en M à la surface. On peut donc regarder AMN, et, de même, le plan analogue précédent ADM, etc., comme respectivement tangents à la surface en M, D, etc.; de sorte que les tangentes AM, AN, ... sont, à la limite, les intersections successives des plans tangents proposés.

En conséquence, et par analogie avec le lieu des intersections successives d'une famille de courbes, lieu qui est une ligne appelée *enveloppe* de la famille, le *cône* AMPQ formé par les tangentes émanées de A sera dit l'*enveloppe* de la famille des plans tangents conduits à la surface par le point A. Et comme ces mêmes plans, menés dans le cône suivant deux génératrices consécutives, AM et AN, ou AD et AM, etc., lui sont évidemment tangents, on peut dire que le cône est *circonscrit* à la surface $F = c$. Si l'on appelle X, Y, Z les coordonnées d'un quelconque, K, de ses points, situé sur la génératrice joignant le point fixe (x_1, y_1, z_1) au point de contact mobile (x, y, z), les équations de cette génératrice seront $\frac{X - x_1}{x - x_1} = \frac{Y - y_1}{y - y_1} = \frac{Z - z_1}{z - z_1}$, où l'on pourra se représenter y, z remplacés par leurs valeurs en fonction de x tirées des deux équations de la courbe de contact. Et l'élimination de x entre ces deux équations de la génératrice, ou de x, y, z entre elles et celles de la courbe de contact, donnera enfin, en X, Y et Z, l'équation du cône circonscrit à partir du sommet A.

Si, par exemple, ce point A est un foyer lumineux et que la surface $F = c$ soit celle d'un corps opaque, *portant ombre* derrière lui, le prolongement du cône au delà de la courbe de contact séparera les parties éclairées de l'espace d'avec celles qui ne le seront pas; de sorte que, sur le corps opaque lui-même, la courbe de contact en opérera la démarcation. Aussi l'a-t-on désignée par le nom de *ligne d'ombre*.

Quand le point A s'éloigne à l'infini le long d'une droite donnée OA émanée de l'origine, x_1, y_1, z_1 grandissent en conservant leurs rapports, et l'équation (2), qu'on peut concevoir divisée par une quantité de l'ordre de $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, se réduit finalement, dans son premier

membre, aux trois termes comparables à ce radical. Elle est donc alors

$$x_1 \frac{dF}{dx} + y_1 \frac{dF}{dy} + z_1 \frac{dF}{dz} = 0.$$

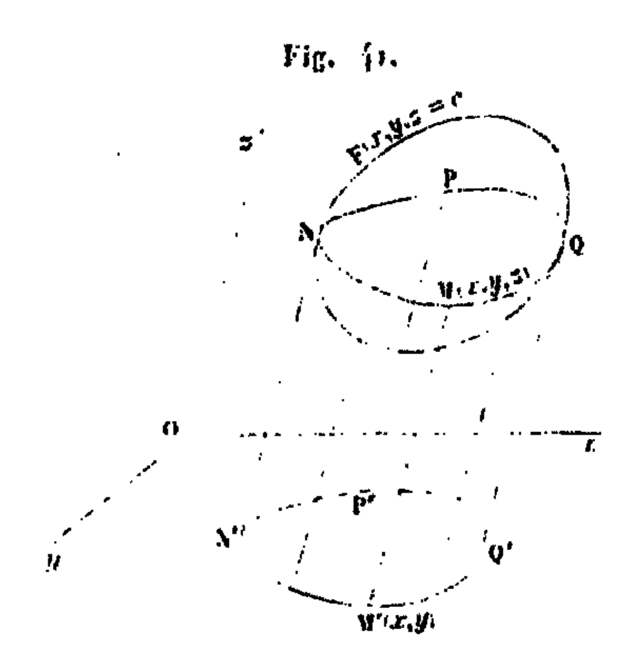
Les plans tangents menés par A deviennent parallèles à la droite donnée OA et leur enveloppe circonscrite à la surface, lieu des tangentes maintenant parallèles à cette droite, n'est plus un cône, mais un *cylindre* (ou surface à génératrices rectilignes et parallèles).

Dans le cas de la surface du second degré représentée par (3) [p. 252], la courbe de contact sera son intersection suivant le plan $\frac{x_1 x}{A} + \frac{y_1 y}{B} + \frac{z_1 z}{C} = 0$, qui passe au centre ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) de la surface. Cette équation indique qu'il est le plan diamétral conjugué à la direction de OA, ou coupant en leurs milieux les cordes parallèles à OA. On aurait pu le prévoir; car, dans les tangentes comme MA, le point de contact M est le milieu d'une corde infiniment petite de même direction, en sorte que la courbe de contact fera partie du plan diamétral comprenant les milieux de toutes les cordes parallèles à OA.

176. — Contour apparent d'une surface.

Un cas particulier du dernier problème mérite un examen spécial; c'est celui où l'on veut mener à la surface $F(x, y, z) = c$ les plans

Fig. 41.



tangents ou les tangentes, parallèles à l'axe des z. Et la raison de son importance est que le cylindre circonscrit enveloppe de ces plans ou lieu de ces tangentes sert de limite à l'ensemble des ordonnées z de

la surface. En effet, lorsque les pieds, sur le plan des xy, de ces ordonnées z, menées à partir des divers points de la surface ou seulement de l'une de ses nappes, ne couvrent pas tout le plan des xy, mais sont limités par une certaine courbe M'N'P'Q', projection d'une ligne au moins MNPQ de la surface, c'est (vu la continuité démontrée des surfaces dont il s'agit) que deux parties de la surface, à ordonnées z plus petites pour l'une et plus grandes pour l'autre, viennent se souder suivant cette ligne MNPQ, en présentant dans le voisinage deux ordonnées z très peu différentes pour un même point (x, y) du plan xOy; et le cylindre limite MNPQQ'M'N'P' est bien un lieu de *tangentes* parallèles à l'axe Oz.

On a surtout à considérer son intersection M'N'P'Q' par le plan des xy, lieu des pieds des ordonnées extrêmes z de la surface. On l'appelle le *contour apparent* de celle-ci, parce qu'elle limiterait évidemment la surface pour un observateur situé à l'infini sur l'axe des z et qui, sur le plan des xy comme *tableau*, verrait se projeter les points de la surface aux pieds mêmes de leurs ordonnées z. Pour obtenir son équation, il suffit d'observer qu'il y a sur le plan des xy, infiniment près de chacun de ses points, tel que M', des points (x, y) d'où partent deux ordonnées z et $z + dz$ infiniment peu différentes, donnant en conséquence, outre $F(x, y, z) = c$, $F(x, y, z + dz) = c$ et par suite $\frac{F(x, y, z + dz) - F(x, y, z)}{dz} = 0$, c'est-à-dire $\frac{dF}{dz} = 0$. On n'aura donc qu'à éliminer z entre les deux relations

$$(10) \qquad F(x, y, z) = c, \qquad \frac{dF(x, y, z)}{dz} = 0.$$

Par exemple, dans le cas de la surface du second degré (3) [p. 252], la seconde relation (10) donne simplement $z = 0$, et le contour apparent est la section plane faite dans la surface par le plan des xy.

177*. — Problème général des ombres; développable circonscrite à deux surfaces.

(compléments p. 221*).

178*. — Détermination d'une surface par l'ensemble de ses plans tangents; onde de Fresnel; idée des surfaces enveloppes en général.

(Compléments, p. 224*).

179*. — De la normale à une surface.

L'interprétation géométrique des paramètres différentiels du premier ordre nous a fourni (dans le Fascicule II, p. 59*) l'occasion

d'étudier la normale à une famille de surfaces et d'évaluer ses cosinus directeurs. C'est pourquoi je me bornerai actuellement au cas d'une simple surface, représentée, en coordonnées rectangulaires, par une relation de la forme $z = f(x, y)$. L'équation (1) [p. 251] du plan tangent y revenant à

$$-p(x_1 - x) - q(y_1 - y) + (z_1 - z) = 0,$$

où p et q désignent les deux dérivées partielles de $z = f(x, y)$ en x et en y, toute perpendiculaire à ce plan aura, d'après un raisonnement répété déjà plusieurs fois, ses cosinus directeurs proportionnels aux coefficients $-p$, $-q$, 1 de $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$. Par suite, si l'on appelle maintenant x_1, y_1, z_1 les coordonnées courantes non plus du plan, mais de la *normale*, qui est, parmi ces perpendiculaires, celle qui part du point (x, y, z) de contact, ses deux équations seront, encore d'après un autre raisonnement plusieurs fois reproduit, $\frac{x_1 - x}{-p} = \frac{y_1 - y}{-q} = \frac{z_1 - z}{1}$, ou bien, par la comparaison de chacun des deux premiers rapport au troisième,

$$(23) \qquad x_1 - x + p(z_1 - z) = 0, \qquad y_1 - y + q(z_1 - z) = 0.$$

Nous conviendrons de la mener, à partir du point (x, y, z), du côté qui fait avec les z positifs un angle aigu, en sorte que le troisième cosinus directeur soit positif; et nous désignerons alors par α, β, γ ses trois angles avec les parties positives des axes, ou par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les trois cosinus directeurs dont il s'agit. Aux rapports égaux $\frac{\cos\alpha}{-p}$, $\frac{\cos\beta}{-q}$, $\frac{\cos\gamma}{1}$, dont le troisième est pris ainsi positif, nous en adjoindrons un quatrième, en ajoutant terme à terme leurs carrés, puis extrayant du résultat la racine carrée *positive;* et leur égalité à ce quatrième rapport nous donnera, pour les trois cosinus directeurs cherchés de la normale, les valeurs

$$(24) \quad \cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \qquad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.$$

L'angle γ fait par la normale avec l'axe des z aura une importance particulière, si du moins on a pris le plan des xy horizontal; car il vaudra évidemment l'angle du plan tangent avec le plan horizontal, et sa tangente trigonométrique mesurera la *pente* de la surface en (x, y, z). La formule connue $\tang\gamma = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\gamma} - 1}$ donnera pour cette

pente, en substituant, d'après la troisième (24), p^2+q^2+1 à l'inverse de $\cos^2\gamma$,

$$\operatorname{tang}\gamma = \sqrt{p^2+q^2}. \tag{25}$$

C'est bien l'expression que nous avions déjà obtenue, au n° 46* (p. 61*), en interprétant le paramètre différentiel Δ_1 de la fonction de point $z=f(x, y)$.

180*. — Lignes de niveau et lignes de pente; leur forme dans le voisinage d'un fond, d'un sommet, ou d'un col ordinaires.

(Compléments, p. 229*).

181*. — Autre exemple, où les lignes de niveau et de pente sont circulaires en projection horizontale.

(Compléments, p. 232*).

182*. — Variations de la déclivité le long des lignes de niveau d'une surface.

(Compléments, p. 235*).

183*. — Lignes des déclivités maxima et minima d'une surface; leurs propriétés.

(Compléments, p. 237*).

184*. — Équation finie de ces lignes.

(Compléments, p. 238*).

185*. — Application des théories précédentes à la surface terrestre: thalwegs, faîtes, bassins, etc.

(Compléments, p. 240*).

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

* COURBURE DES SURFACES.

186*. — Des formes qu'affecte, en général, une surface, aux environs d'un de ses points; paraboloïde de contact.

(Compléments, p. 244*).

187*. — Des deux plans normaux principaux d'une surface, et de ses deux sections principales, en un quelconque de ses points.

(Compléments, p. 246*).

188*. — Propriété caractéristique des sections principales : ombilics.

(Compléments, p. 247*).

189*. — Courbures principales de la surface au point considéré; courbure moyenne et courbure essentielle ou permanente.

(Compléments, p. 249*).

190*. — Détermination de la forme d'une surface aux environs d'un point, en fonction des deux rayons principaux de courbure relatifs à ce point.

(Compléments, p. 251*).

191*. — Surfaces à courbures de même sens et surfaces à courbures opposées; indicatrice.

(Compléments, p. 252*).

192*. — Courbure des lignes tracées sur une surface; théorèmes d'Euler et de Meusnier.

(Compléments, p. 254*).

193*. — Formule générale de cette courbure.

(Compléments, p. 258*).

194*. — Calcul des directions et courbures principales, de la courbure moyenne et de la courbure permanente, pour les divers points d'une surface.

(Compléments, p. 259*).

195*. — Caractères analytiques et détermination des ombilics d'une surface.

(Compléments, p. 262*).

196*. — Calcul des directions asymptotiques pour les divers points d'une surface.

(Compléments, p. 265*).

VINGTIÈME LEÇON.

* LIGNES DE COURBURE ET LIGNES ASYMPTOTIQUES. * SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX DE SURFACES ET TRANSFORMATIONS PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES. *NOTIONS SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES ET SUR LES SURFACES APPLICABLES. * LIGNES GÉODÉSIQUES.

FIN DE LA PARTIE ÉLÉMENTAIRE DU TOME I.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
11672 Quai des Augustins, 55.